А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ТРУДЫ ТРЕТЬЕГО ВСЕСОЮЗНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЪЕЗДА

Москва, июнь—июль 1956

Том II

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ОБЗОРНЫХ И СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва · 1956

ТЕЗИСЫ
ОБЗОРНЫХ ДОКЛАДОВ

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Б. А. Венков (*Ленинград*). **Метрика Вороного и метрика Лобачевского в геометрии чисел.** Целью доклада является обзор работ Б. Н. Делоне, А. Д. Александрова, Б. А. Венкова и других советских математиков по правильному делению эвклидова и некоторых типов неэвклидовых пространств:

1) параллелоэдры в эвклидовом пространстве;

2) арифметико-геометрические задачи, касающиеся квадратичной формы с n переменными, k положительными, l отрицательными квадратами ($k+l=n$) в случае $k=1$ или $l=1$ (метрика Лобачевского);

3) фундаментальная область группы целочисленных унимодулярных подстановок в пространстве положительных квадратичных форм и метрика Вороного;

4) геометрия квадратичной формы в случае $k>1$, $l>1$ (пространство миноров).

И. М. Виноградов (*Москва*). **Проблемы аналитической теории чисел.** Тригонометрические суммы вида

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}.$$

Случай, когда $f(x)$—многочлен с рациональными коэффициентами, общий знаменатель которых равен P. Случай, когда $f(x)$—многочлен общего вида или функция, в известном смысле близкая к многочлену. Другие суммы.

Распределение значений многочлена по заданному модулю. Степенные вычеты и невычеты. Распределение дробных частей значений многочлена общего вида или функции, в известном смысле близкой к многочлену. Число целых точек в заданной области. Другие применения. Функции, растущие быстрее многочлена. Аддитивные проблемы. Существование решений. Асимптотические формулы.

Тригонометрические суммы с простыми числами. Простейшие суммы. Случай многочлена как функции, в известном смысле близкой к многочлену. Законы распределения дробных частей в указанных случаях. Другое истолкование этих законов.

Аддитивные проблемы с простыми числами. Существование решений. Асимптотические формулы.

А. О. Гельфонд (*Москва*). **Трансцендентные числа.** За последние 10 лет в области трансцендентных чисел получили развитие как метод К. Зигеля для функций типа e^x, так и метод для доказательства трансцендентности и взаимной трансцендентности значений функций типа a^x при алгебраическом a.

В докладе, помимо общего очерка исторического характера, рассматриваются более подробно последние результаты в направлении двух вышеуказанных методов.

1. Определение и элементарные критерии трансцендентности.
2. Аналитический метод Эрмита—Линдемана.
3. Линейные формы и критерий линейной независимости форм по А. Туэ.

4. Общий аналитический метод К. Зигеля и дальнейшее развитие этого метода. Трансцендентность значений функции типа e^x—так называемых E-функций.

5. Проблема Л. Эйлера—Д. Гильберта и трансцендентность значений функций типа a^x при алгебраическом a. Принцип аналитического продолжения неравенств.

6. Общие идеи связи между арифметическими и аналитическими свойствами аналитических функций.

Н. М. Коробов (*Москва*). **Диофантовы приближения с показательными функциями.** I. Введение. До последнего времени в теории диофантовых приближений изучались преимущественно линейные функции, а также полиномы и функции, по своим свойствам близкие к полиномам. Для показательных функций были получены лишь некоторые результаты, имеющие метрический характер, и установлены отдельные факты, касающиеся построения нормальных чисел или, что то же, чисел α, для которых дробные доли функции αq^x равномерно распределены.

Исследование показательных функций αq^x, где α—действительное число, $q\geqslant 2$—целое и x—целочисленный аргумент, имеет для теории чисел большое значение, так как изучение арифметических свойств этих функций равносильно изучению арифметической природы произвольного числа α в q-ичной системе счисления.

За последнее десятилетие значительно возросло число работ, в которых рассматриваются арифметические свойства показательных функций. Основные задачи теории диофантовых приближений—приближенное решение уравнений и систем уравнений в целых числах, различные вопросы распределения дробных долей, исследование тригонометрических сумм—были поставлены и в ряде случаев разрешены для показательных функций. Были найдены некоторые общие методы, охватывающие сравнительно широкий круг вопросов, касающихся показательных функций вида αq^x. Таким образом, в настоящее время можно говорить о возникновении нового направления в области диофантовых приближений—диофантовых приближений с показательными функциями.

II. Некоторые методы. 1) Построение чисел α, обладающих такими рациональными приближениями вида $\frac{a}{m}$, что соответствующие «рациональные» тригонометрические суммы с показательными функциями

$$\sum_x e^{2\pi i \frac{aq^x}{m}}, \qquad (a, m)=1,$$

имеют нетривиальную оценку.

2) Применение нормальных периодических систем $\rho_n(q)$, т. е. систем знаков

$$\delta_1\delta_2\delta_3 \ldots \delta_\tau\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{n-1} \qquad (\tau=q^n, \quad 0\leqslant\delta_\nu\leqslant q-1),$$

обладающих тем свойством, что совокупность комбинаций

$$\delta_1 \ldots \delta_n, \quad \delta_2 \ldots \delta_{n+1}, \ldots, \quad \delta_\tau \ldots \delta_{n-1},$$

получающихся из соседних знаков системы, совпадает с совокупностью всех различных n-значных чисел, существующих в q-ичной системе счисления.

III. Основные результаты. 1) Построение нормальных чисел. Построение совместно нормальных чисел или, что то же, чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, для которых дробные доли системы функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределены в s-мерном пространстве (здесь $q_1, \ldots, q_s$—произвольные целые, большие единицы).

2) Вопрос о числе попаданий дробных долей функции αq^x в заданный интервал. Многомерная задача о числе попаданий дробных долей системы функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ в заданный объем.

3) Оценки тригонометрических сумм вида

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x} \quad \text{и} \quad \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1\alpha_1 q_1^x+\ldots+m_s\alpha_s q_s^x)},$$

где $m \neq 0$ — любое целое и $m_1, \ldots, m_s$ — система целых чисел, из которых хотя бы одно отлично от нуля. Возможность получения неулучшаемых оценок таких сумм.

4) Асимптотика сумм дробных долей вида

$$\sum_{x=1}^{P}{}' \{\alpha q^x\}.$$

Возможность получения неулучшаемых оценок разности между суммой дробных долей и ее средним значением $\frac{P}{2}$.

5) Задачи чебышевского типа. Необходимые и достаточные условия разрешимости в целых числах x и y неравенства

$$|\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t}, \quad 0 < x \leqslant Ct$$

при некотором $C > 0$, любом $t > 0$ и любом β. Необходимые и достаточные условия разрешимости системы неравенств такого вида.

Ю. В. Линник (*Ленинград*). **Некоторые применения геометрии Лобачевского к теории характеров Дирихле.** 1) Некоторые аналитические проблемы теории характеров. Связи с плотностной гипотезой и гипотезой Римана для L-рядов. Условные результаты.

2) Бинарные квадратичные формы как средство изучения реальных характеров. Асимптотические свойства приведенных форм в связи с геометрией Лобачевского. Новые оценки в теории реальных характеров.

3) Эргодическая теорема для группы классов идеалов $k(\sqrt{-D})$. Теорема «перемешивания» как следствие эргодической теоремы.

4) Асимптотическая геометрия подгрупп и смежных классов группы классов идеалов $k(\sqrt{-D})$. Асимптотическая геометрия гауссовых родов.

5) Интерпретация эргодической теоремы и ее следствий с помощью модулярного инварианта как задачи о «решетке» на плоскости Лобачевского.

6) Новые результаты о малых квадратичных невычетах и малых простых квадратичных вычетах.

7) Возможность обобщения эргодической теоремы для группы классов любого поля алгебраических чисел. «Детерминантные» формы и оценки сумм Вейля.

СЕКЦИЯ АЛГЕБРЫ

А. И. Мальцев (*Иваново*). **Алгебраические системы.** Уже в первые десятилетия нашего века возникло обыкновение определять алгебру как науку о множествах, снабженных некоторыми операциями, т. е. как науку об алгебраических системах. Но до 40-х годов это определение было слишком широким, так как алгебра того времени изучала лишь группы, кольца и поля. С середины 30-х годов положение постепенно менялось. Прежде всего резко увеличилось число классов алгебраических систем, подвергавшихся систематическому изучению: возникла теория решеток, накапливался материал по теории разного рода обобщенных групп и колец, изучались алгебры отношений математической логики. Далее выяснилось, что некоторые важные классические теоремы поддаются обобщению на произвольные алгебраические системы с тою же степенью полноты (или неполноты), как и на конкретные важные классы систем. Наконец, весьма общие локальные теоремы, стоящие на грани между алгеброй и математической логикой, позволили решить конкретные проблемы в такой классической области, как теория групп. В настоящее время, повидимому, можно считать уже оформившейся в качестве особой алгебраической дисциплины общую теорию алгебраических систем.

Первый цикл вопросов, исследованных более или менее подробно для общих алгебраических систем, составляют вопросы о гомоморфизмах, прямых и подпрямых произведениях, теоремах типа Жордана—Гельдера, о простоте и полупростоте систем.

Специфической областью общей теории алгебраических систем стало учение о свободных системах, определяющих соотношениях, классах систем. Относящиеся сюда проблемы равенства слов, тождественных соотношений и изоморфизмов естественно связываются с теорией алгоритмов. С этими же проблемами оказывается связанной и теория вложения так называемых частичных систем в обыкновенные.

Некоторые вопросы теории алгебраических систем (локальные теоремы, частичные системы, теория классов алгебр) потребовали перехода к более общей точке зрения: к изучению множеств с произвольной системой предикатов, называемых теперь моделями. В этой области, объединяя методы алгебры и математической логики, удалось найти несколько весьма общих и в то же время действенных теорем. В последнее время появились работы, посвященные алгебраическому истолкованию теоремы Гёделя.

Упомянутые теории имеют дело с дискретными множествами объектов. В поисках более универсальных схем, естественно, возникли попытки ввести и понятия непрерывности. В частности, основные результаты теории свободных топологических групп и теории топологических групп с определяющими соотношениями оказалось возможным распространить на широкие классы топологических алгебраических систем. Возможно, будет плодотворным и рассмотрение топологизированных моделей.

И. Р. Шафаревич (*Москва*). **Теория Галуа и арифметика числовых полей.** В докладе изложены результаты, группирующиеся вокруг задачи погружения нормального расширения в расширение с предписанной группой Галуа над основным полем. Речь идет главным образом о конечных расширениях поля рациональных чисел. В этом случае задача погружения глубоко связана с арифметическими свойствами полей алгебраических чисел. Доклад содержит также приложения результатов, полученных в задаче погружения, к теории радикальных расширений числовых полей.

СЕКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Бицадзе (*Москва*). **Уравнения смешанного типа.** 1. Нормальные формы линейных дифференциальных уравнений второго порядка смешанного типа в случае двух независимых переменных.

2. Основные граничные задачи в эллиптической области, граница которой содержит участок линии вырождения типа.

3. Основные задачи в гиперболической области, граница которой содержит участок линии вырождения типа.

4. Задача Трикоми и некоторые ее простейшие обобщения для уравнений смешанного типа.

5. Обобщенная смешанная граничная задача для уравнения Лаврентьева.

6. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях.

И. Н. Векуа (*Москва*). **Теория обобщенных аналитических функций и ее применения в геометрии и механике.** 1. За последние годы получила значительное развитие теория комплексных функций вида $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, где u и v — вещественные функции, удовлетворяющие в обобщенном смысле некоторой системе уравнений с частными производными первого порядка эллиптического типа следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+a(x, y)u+b(x, y)v=0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+c(x, y)u+d(x, y)v=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Этот класс функций обладает многими свойствами, инвариантными в отношении изменений коэффициентов и, следовательно, присущими аналитическим функциям одной комплексной переменной ($a=b=c=d=0$). Поэтому такого рода функции можно назвать обобщенными аналитическими функциями.

2. Систему уравнений (1) часто удобнее записывать в комплексной форме:

$$\begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+Aw+B\bar{w}=0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{gathered} \qquad (2)$$

В отношении коэффициентов мы примем допущение, что они принадлежат классу $L_{p,2}(E)$. Этот класс содержит функции, удовлетворяющие условиям

$$f(z),\ |z|^{-2}f\left(\frac{1}{z}\right)\in L_p, \quad \text{если} \quad |z|\leqslant 1, \quad p>1. \qquad (3)$$

В дальнейшем через $\mathfrak{A}_{p,2}(A, B, G)$ будем обозначать класс обобщенных решений уравнения (2) в области G, а через $\mathfrak{A}^0(G)$ — класс аналитических в G функций ($A=B=0$).

Пару функций A и B мы называем образующей парой класса $\mathfrak{A}_{p,2}(A, B, G)$. Имеет место

Теорема. Если $p > 2$, то всякая суммируемая функция $w(z)$ класса $\mathfrak{A}_{p,2}(A, B, G)$ непрерывна в смысле Гельдера внутри G, причем показатель Гельдера равен $\frac{p-2}{p}$

3. Можно указать ряд формул, выражающих обобщенные аналитические функции через аналитические функции, и наоборот. Например, имеет место следующая

Теорема. Если $w \in \mathfrak{A}_{p,2}(A, B, G)$, $p > 2$, то найдется такая функция $\Phi(z)$ класса $\mathfrak{A}^0(G)$, что

$$w(z) = \Phi(z) e^{\omega(z)}, \tag{4}$$

где ω — некоторая непрерывная функция, и, обратно, если задана аналитическая в G функция $\Phi(z)$, то найдется такая функция $w(z)$ класса $\mathfrak{A}_{p,2}(A, B, G)$, которая выражается через Φ по формуле (4).

4. Формула (4) позволяет обобщать многие свойства аналитических функций на класс обобщенных аналитических функций. Например, для всех классов $\mathfrak{A}_{p,2}(A, B, G)$, $p > 2$, имеют место теоремы единственности (в частности, изолированность внутренних нулей), принцип аргумента и ряд его следствий, теорема Лиувилля, локальная однолистность отображений, принцип компактности и др.

5. Выводится также обобщенная интегральная формула Коши, с помощью которой доказываются теоремы о рядах и последовательностях обобщенных аналитических функций. В естественной форме обобщаются ряды Тейлора, Лорана и др.

6. Обобщенные аналитические функции допускают геометрическое и механическое толкование. Всякую такую функцию можно представить как вектор на комплексной плоскости, выражающий либо касательное смещение при бесконечно малом изгибании некоторой поверхности положительной кривизны, либо усилие безмоментного напряженного состояния равновесия некоторой оболочки положительной кривизны. При таком истолковании обычные аналитические функции выражают бесконечно малые изгибания или безмоментное напряженное состояние класса поверхностей положительной кривизны, который содержит, в частности, сферические поверхности.

Поэтому свойствам обобщенных аналитических функций можно дать геометрическую и механическую интерпретации. Например, теорема Лиувилля для обобщенных аналитических функций выражает неизгибаемость (жесткость) замкнутой поверхности положительной кривизны (овалоида).

Из теоремы единственности обобщенных аналитических функций вытекает, что если сколь угодно малая дуга поверхности положительной кривизны допускает лишь жесткие перемещения, то поверхность неизгибаема. Совершенно так же, если вдоль некоторой малой дуги средней поверхности оболочки положительной кривизны вектор усилия равен нулю, то оболочка не может быть в состоянии безмоментного напряженного равновесия.

7. Исследование различных связей, совместимых с бесконечно малыми изгибаниями поверхности или с безмоментным напряженным состоянием оболочки, приводит к рассмотрению различных краевых условий для обобщенных аналитических функций. Ряд геометрически или физически реализуемых связей приводит к граничным условиям вида:

$$\alpha_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u + \beta v = \gamma. \tag{5}$$

В настоящее время хорошо изучены краевые задачи с граничными условиями вида:

$$\alpha u + \beta v = \gamma, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{6}$$

Получен также ряд важных результатов в отношении общей задачи с краевым условием вида (5).

8. Установлен ряд признаков разрешимости краевых задач: эти признаки зависят лишь от характера краевых условий, но вовсе не зависят от образующей пары (A, B).

причем выявление их не требует фактического решения краевой задачи. По виду краевого условия, т. е. по характеру наличных связей, эти признаки позволяют судить о том, допускает или не допускает поверхность бесконечно малые изгибания. В частности, можно указать ряд новых признаков жесткости поверхностей положительной кривизны.

Например, жесткими являются овалоиды с отороченными краями, т. е. овалоиды с конечным числом гладких отверстий, склеенных с линейчатыми полосами (сколь угодно малой ширины), образующие которых лежат на соприкасающихся плоскостях контуров отверстий.

9. Важно отметить, что всякое безмоментное напряженное состояние равновесия оболочки положительной кривизны можно интерпретировать как некоторое бесконечно малое изгибание соответствующей срединной поверхности, причем компоненты усилия вдоль некоторой дуги выражаются через вариации кривизны и кручения этой дуги. Это позволяет геометрические признаки жесткости поверхности интерпретировать как статическое условие, не совместимое с безмоментным напряженным состоянием равновесия оболочки.

Указанное обстоятельство имеет важное практическое значение. Оно позволяет чисто геометрическими средствами осуществлять связи, которые допускают или не допускают безмоментное напряженное состояние равновесия оболочки положительной кривизны. Примером может служить овалоид с одним отороченным краем. Такая оболочка не может быть подвергнута деформации, которая соответствует безмоментному напряженному состоянию равновесия. Овалоид со многими отверстиями (больше двух) этому условию не удовлетворяет. Тут играет роль то обстоятельство, что усилиям многосвязной оболочки соответствуют, вообще говоря, многозначные векторы смещения срединной поверхности.

10. Исследование бесконечно малых изгибаний поверхностей, склеенных из конечного числа кусков регулярных поверхностей, приводит к рассмотрению условий сопряжения вдоль линий склеивания. Для простоты рассмотрим случай поверхности, склеенной из двух кусков регулярных поверхностей положительной кривизны вдоль некоторой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой. В таком случае мы будем иметь следующую задачу: отыскать внутри и вне некоторой простой кусочно-гладкой кривой Γ плоскости $z=x+iy$ две обобщенно аналитические функции w_1 и w_2, которые на Γ связаны условиями вида

$$\alpha_1 w_1^+ + \beta_1 \overline{w_1^+} = \alpha_2 w_2^- + \beta_2 \overline{w_2^-} + \gamma_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} \right)^- + \delta_2 \overline{\left(\frac{\partial w_2}{\partial z} \right)}^- .$$

Эта задача является обобщением известной задачи Гильберта для аналитических функций. Сама задача Гильберта также может быть рассмотрена как некоторая геометрическая задача склеивания поверхностей положительной кривизны, для которых система уравнений бесконечно малых изгибаний приводится к системе Коши—Римана. К этому классу поверхностей относятся, в частности, сферические поверхности, параболоиды вращения и ряд других поверхностей.

Поэтому изучение задачи (7) для класса обобщенных аналитических функций представляет значительный интерес.

Аналогично обобщаются также известные задачи Карлемана для аналитических функций.

М. А. Красносельский (*Воронеж*), **М. Г. Крейн** (*Одесса*) и **С. Г. Крейн** (*Воронеж*). **О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве.**

М. Г. Крейн (*Одесса*). **Обыкновенные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами.**

И. С. Куклес (*Самарканд*). **Об особых точках некоторых дифференциальных уравнений.** В докладе рассматривается вопрос о поведении в окрестности начала координат характеристик уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{1}$$

(где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции, исчезающие в начале) и интегральных поверхностей уравнения Пфаффа

$$Xdx+Ydy+Zdz=0 \tag{2}$$

(где $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ и $Z(x, y, z)$ — аналитические функции, исчезающие в начале и связанные условием полной интегрируемости). Кроме того, рассматривается вопрос об аналитическом представлении характеристик уравнения (1) и интегральных поверхностей уравнения (2) в окрестности начала.

Если уравнение Бендиксона возможных касательных для уравнения (1) имеет действительные корни, причем к началу не примыкают нормальные области, то вопрос о том, существуют или нет характеристики, входящие в начало с определенной касательной (т. е. принадлежит ли начало к первой или ко второй группе особых точек), представляет, вообще говоря, значительные трудности, так как на принадлежность особой точки к первой или ко второй группе могут влиять члены сколь угодно высокого порядка.

Эта проблема решается сравнительно легко в некоторых частных случаях, например, если P или Q содержат линейные члены или если одна из этих функций равна x^n. Если P и Q — полиномы степени n, то эта проблема решается с помощью конечного числа операций, а именно: подстановка вида

$$y=\gamma_1 x^{\lambda_1}+\gamma_2 x^{\lambda_1+\lambda_2}+\ldots+\gamma_k x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k}+u x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k} \tag{3}$$

при надлежаще выбранных порядках кривизны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и мерах кривизны $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ приводит уравнение (1) к такому виду, для которого можно сразу решить, существуют ли характеристики, пересекающие ось OU, и имеется ли таких характеристик конечное или бесконечное множество. При этом доказывается, что число различных подстановок вида (3) не превышает n и если каждая из подстановок этого вида приведет к уравнению, для которого нет характеристик, пересекающих ось OU, то начало для уравнения (1) является особой точкой второй группы; в противном случае оно принадлежит к первой группе. Число k определяется неравенством

$$k<n(n-1)+\left[\frac{n}{2}\right] f(n), \tag{4}$$

где

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad f(2)=4;$$
$$f(n)=4\,[n+n(n-2)+n(n-2)(n-4)+\ldots+n!!]+n!! \quad (n>2).$$

Подстановки вида (3) дают ответ и на вопрос о числе и расположении эллиптических, гиперболических и параболических областей, примыкающих к началу, а также о порядке и мере кривизны всех характеристик, входящих в начало. Подстановки (3), в основе которых лежит метод Фроммера, конечно, применимы и в случае, когда P и Q — бесконечные ряды, но тогда оценка (4) для числа k уже не имеет места. Тем не менее и в этом случае иногда возможна оценка числа k по формуле, аналогичной (4). Так, если $Q(x, y)$ — бесконечный ряд, причем $Q(0, y)=y^n\lambda(y)$ $(\lambda(0)\neq 0)$, а P имеет вид x^m или y^m, то оценка числа k дается по формуле $k\leqslant\left[\frac{m}{2}\right] f(n)$, причем число различных подстановок вида (3) не превышает n.

Мы распространили метод, аналогичный методу Фроммера, для исследования поведения поверхностей, определяемых уравнением (2) в окрестности начала. Доказано, что если конус

$$xX_n(x, y, z)+yY_n(x, y, z)+zZ_n(x, y, z)=0 \tag{5}$$

(где X_n, Y_n и Z_n — однородные полиномы степени n, представляющие собой члены наинизшего порядка функций X, Y и Z, причем некоторые из этих полиномов могут быть нулями) вырождается в точку, то все интегральные поверхности уравнения (2), расположенные вблизи начала, будут замкнутыми, окружающими начало. Если конус (5) не вырождается в точку и может быть окружен нормальной областью, то существует одна или бесконечное множество интегральных поверхностей (в зависимости от типа нормальной области), входящих в начало и касающихся там этого конуса. Если при наличии действительного конуса (5) к началу не примыкает нормальных областей, то вопрос о существовании входящих в начало интегральных поверхностей можно решить, пользуясь методом, аналогичным описанному выше. Всякая поверхность, входящая в начало, касается там конуса (5), если только уравнение этого конуса не удовлетворяется тождественно. В последнем случае существует бесконечное множество интегральных поверхностей, входящих в начало, причем каждая из этих поверхностей имеет в начале свой касательный конус. (При этом может оказаться конечное число исключительных конусов, которые служат касательными конусами более чем для одной интегральной поверхности.) В докладе построена классификация особых точек уравнения (1) и разработаны критерии их различения.

В случае, когда P, Q и R являются линейными функциями, уравнение (2) интегрируется в элементарных функциях. В этом случае доказано, что если начало является изолированной особой точкой, то существует лишь конечное число интегральных поверхностей, входящих в начало, или не существует ни одной такой поверхности (т. е. начало является седлом или центром). Этот вывод остается справедливым и для случая любого числа переменных в уравнении Пфаффа.

Нами найдено также аналитическое представление характеристик уравнения (1) и интегральных поверхностей уравнения (2), входящих в особую точку, причем это аналитическое представление выполнимо во всех случаях, когда такие характеристики или поверхности существуют. Для уравнения

$$x^m \frac{dy}{dx} = r_0(x) + y r_1(x) + y^2 r_2(x) + \ldots \tag{6}$$

при $r_1(0) > 0$ общее решение, исчезающее при $x = 0$, может быть представлено следующим образом:

$$y = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_n(x) + \ldots,$$

где

$$\psi_1 = e^{-k} \left[\int\limits_{x_0}^{x} \frac{r_0}{x^m} e^k dx + y_0 e^k \right],$$

$$\psi_n = e^{-k} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{x^m} \left[r_2 \sum^{i+j=n} \psi_i \psi_j + r_3 \sum^{i+j+p=n} \psi_i \psi_j \psi_p + \ldots + r_n \psi_1^n \right] dx;$$

$$k = -\int \frac{r_1}{x^m} dx.$$

При $r_1(0) < 0$ решение уравнения (6) при условии $x_0 = y_0 = 0$ также существует и представляет собой сепаратрису гиперболической области. При $m = 1$ решение уравнения (6) будет аналитической функцией.

В разработке указанных проблем принимали участие под руководством автора его ученики Н. Б. Хаимов, П. Л. Хаимова, А. Н. Берлинский (Сталинабад) и М. М. Гукьямухов (Самарканд).

О. А. Ладыженская (*Ленинград*). **Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными.** 1. Метод конечных разностей является не только мощным средством вычисления приближенных решений тех или иных задач для уравнений в частных производных, но и весьма общим методом доказательства теорем существования и исследования дифференциальных свойств решений этих задач. Цель нашего доклада состоит в том, чтобы осветить метод конечных разностей (м. к. р.) с этой последней точки зрения.

Мы покажем, что большая часть задач о разрешимости тех или иных уравнений математической физики и о дифференциальных свойствах их решений допускает исследование м. к. р. Центр тяжести этих исследований лежит в доказательстве равномерной ограниченности в той или иной норме приближенных решений u_h разностных уравнений для $h=h_1, h_2, \ldots \to 0$ в зависимости от ограниченности норм данных в задаче функций. Для линейных задач такие оценки гарантируют устойчивость выбранной разностной схемы. Другим необходимым элементом м. к. р. является доказательство теорем, позволяющих из ограниченности u_h в одних нормах заключить о их компактности в других и позволяющих тем самым выполнить необходимые предельные переходы по $h_k \to 0$ от u_h к u. Такие теоремы даны, по существу, уже в работах [1], [2]. Более точные, имитирующие в разностях теоремы вложения С. Л. Соболева даны в работе [3] (см. также [4]).

Мы рассмотрим основные задачи для уравнений и систем в частных производных различных типов, для которых построены сходящиеся конечно-разностные схемы.

2. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического типа.

Первыми работами, в которых методом к. р. исследуется задача Дирихле для уравнения Лапласа и которые вообще легли в основу дальнейших применений этого метода к уравнениям в частных производных, являются работы Л. А. Люстерника [1] и Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви [2]. В этих работах, а также в работе И. Г. Петровского [5] исследуется вопрос о существовании решения задачи, гладкого внутри рассматриваемой области. В работе [6] в том же плане исследованы краевые задачи для эллиптического уравнения и стационарных уравнений теории упругости. Эти рассмотрения упрощаются, если первоначально доказывать существование так называемого обобщенного решения задачи, а затем исследовать его дифференциальные свойства (причем это последнее можно сделать с помощью конечных разностей во всей замкнутой области определения решения; см. [7], гл. IV). М. к. р. позволяет также вычислять собственные функции и собственные значения краевых задач.

Нелинейные эллиптические уравнения этим методом почти не решались (см. [8], [9]). Правда, при исследовании дифференциальных свойств решения таких уравнений использовалась замена производных разностными отношениями (см. работы Моррея и А. Г. Сигалова).

3. Задача Коши для уравнений и систем гиперболического типа.

В работе [2] исследована задача Коши для гиперболического уравнения 2-го порядка с одной пространственной координатой и со многими координатами, когда коэффициенты при смешанных производных достаточно малы по сравнению с коэффициентами при одноименных производных. В этой работе указано, как величина отношения $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ влияет на сходимость разностного процесса при выбранной авторами простейшей разностной схеме. Затем сходящиеся разностные схемы были построены (см. [3]) для линейных и квазилинейных систем гиперболического типа, выделенных И. Г. Петровским. Частным случаем таких систем являются общие линейные и квазилинейные уравнения второго порядка и так называемые симметрические системы гиперболического типа, для которых сходящимися оказываются более простые разностные схемы (см. [3], [7] и более позднюю работу [10]). Задача Коши для квазилинейных систем решается в работе [3] в малом (то же делается и в работе [11], в которой рассмотрен случай одной пространственной переменной). Существенным в работе [3] является введение разложений произвольных функций на решетках по собственным функциям простейшего разностного оператора $\frac{\Delta}{\Delta x}$, именно, по функциям $e^{i(k_1x_1+\ldots+k_nx_n)}$. Эти разложения позволяют в замкнутой форме решать многие разностные уравнения и системы с постоянными коэффициентами и устанавливать, будет ли данная разностная схема сходящейся или нет (см. [3], [11]—[14] и др.). Таким путем удалось исследовать сходимость различных разностных схем для упомянутых выше уравнений и систем с переменными коэффициентами. В [3] рассмотрены разные разностные схемы, в том числе и такие, которые сходятся при любом отношении $\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Нелинейные гиперболические уравнения в большой области, где их решения могут иметь разрывы, почти не исследованы.

Для нелинейных уравнений одномерного течения газа Лаксом [15] и С. Годуновым указаны разностные схемы, которые, вероятно, приведут к желаемым результатам.

4. Смешанные задачи для уравнений и систем гиперболического и параболического типов.

Первая краевая задача для линейного параболического уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами в случае одной пространственной переменной решена Роте [16]. Его результаты легко распространяются на случай любого числа пространственных переменных. Сходная замена порождает сходящийся разностный процесс в задаче Коши для определенного класса операторных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}(S_1(t)\,u) + S_2(t)\,u = f(t), \quad u(0) = \varphi_0,$$

частным случаем которой являются краевые задачи для сильно параболических систем (см. [17]).

М. к. р. позволил решить в большом смешанные задачи для линейных гиперболических уравнений 2-го порядка (см. [7]). При этом оказалось, что простейшая симметрическая замена порождает сходящийся процесс лишь тогда, когда отсутствуют члены с $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}$ (и, конечно, когда $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ меньше некоторого числа). В противном случае приходится брать более сложные замены типа, введенного в [3]; они позволяют свести решение задачи Коши для операторных уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}(S_1(t)\,u) + \frac{d}{dt}(S_2(t)\,u) + S_3(t)\,u = f(t) \\ &u(0) = \varphi_0, \qquad \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(где $S_i(t)$—некоторые неограниченные линейные операторы) к последовательному по $t=h$, $2h,\ldots$ решению стационарных задач (см. [17]). Частным случаем задачи (1) является первая краевая задача для сильно гиперболических систем.

Метод конечных разностей позволил также решить ряд нестационарных задач диффракции для гиперболических уравнений и систем уравнений теории упругости с произвольными переменными коэффициентами и произвольными разрывами ([18]), разрешимость которых другими способами не получена.

6. Смешанная задача и задача Коши в целом решена для некоторых классов квазилинейных параболических уравнений. Для случая одного пространственного переменного это сделано в работах [19]—[21], для случая многих пространственных переменных—в работе [22]. В малом она решена в работе [23].

Методом конечных разностей впервые решена краевая задача для нелинейных равнений Навье—Стокса, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости в случае двух пространственных переменных ([24]).

7. Построены сходящиеся разностные схемы для задачи Трикоми (см. [25], [26]).

8. Мы оставляем в стороне большой вопрос об оценке скорости сходимости к истинному решению приближенных решений u_h, получаемых при более или менее точной аппроксимации данного уравнения разностным.

Лит.: 1. Люстерник Л. А., УМН, вып. 8, (1940), 115—124. 2. Курант Р., Фридрихс К. и Леви Г., УМН, вып. 8, (1940), 125—160. 3. Ладыженская О. А., Кандидатская диссертация, ЛГУ, март. 1949 г.; Учен. зап. ЛГУ, вып. 23, 1952; ДАН СССР. 88, 1953. 4. Петровский И. Г. и Смирнов К. Н., Bull. l'Université Moscou, Sec. A, v. I, (1938). 5. Петровский И. Г., УМН, вып. 8, (1940), 160—170. 6. Эйдус Д. М., О решении смешанной краевой задачи для уравнений эллиптического типа методом конечных разностей. ЛГУ, 1950.

7. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва, Гостехиздат, 1953. 8. Nirenberg L., Comm. Pure and Appl. Math., v. VI, № 3, (1953). 9. Bers L., J. Res. Nat. Bur. Standards, 51, № 5, (1953), 229—236. 10. Friedrichs K. O., Comm. Pure and. Appl. Math., v. VII, № 2, (1954). 11. Courant R., Isaacson E., Rees M., Comm. Pure and Appl. Math. v. V, № 3, (1952). 12. Рябенький В. С., ДАН СССР, **86**, 6, (1952), 1071—1074; УМН, вып. 8, (1953), 164—165. 13. O'Brien G. G., Hyman M. A., Kaplan S., I Math. and Phys., 29, 4, (1951), 223—251. 14. Камынин Л. И., Изв. АН СССР, сер. мат., 17, № 2, (1953), 163—180, и др. работы. 15. Lax P., Comm. Pure and Appl. Math., v. 7, № 1, (1954). 16. Rothe E., Math. Ann., 104, (1931), 340—362. 17. Ладыженская О. А., Матем. сб., 39 (81), (1956). 18. Ладыженская О. А., ДАН СССР, **96**, № 3, (1954). 19. John F., Comm. Pure and Appl. Math., v. V, № 2, (1952). 20. Prodi G., Rend. Seminar mat. Univ., Padova, 23, № 1, (1954), 25—85. 21. Вентцель Т. Д. и Олейник О. А., ДАН СССР, **97**, № 4, (1954). 22. Ладыженская О. А., ДАН СССР, **107**, № 6, (1956). 23. Мейман Н. Н., ДАН СССР, **97**, № 4, (1954); ДАН СССР, **99**, № 2, (1954). 24. Киселев А. А., ДАН СССР, **100**, № 5, (1955). 25. Халилов З. И., ДАН Азерб. ССР, **9**, № 4, (1953), 189—194. 26. Ладыженская О. А., УМН, т. 9, вып. 4, (62), (1954). 27. Hopf E., Comm. Pure and Appl. Math., v. III, № 3, (1950). 28. Олейник О. А., ДАН СССР, **95**, (1954), 451—455. 29. Тихонов А. Н. и Самарский А. А., ДАН СССР, **99**, № 1, (1954).

Л. Д. Ландау (*Москва*), **Н. Н. Мейман** (*Москва*) **и И. М. Халатников** (*Москва*). **Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток.**

1. Разностные схемы интегрирования уравнения в частных производных.

2. Уравнения для распространения возмущений. Устойчивость разностных схем.

3. Алгебраические критерии устойчивости разностных схем.

4. Оценка аппроксимаций решения дифференциального уравнения решением разностного уравнения.

5. Интегрирование уравнений гидродинамики. Устойчивость схем по времени и пространству. Роль звуковой точки. «Бегущий» счет (счет большими шагами по времени). Неголономные дифференциалы.

6. Нахождение решений типа установившихся режимов ($t \to \infty$) для уравнений гидродинамики.

7. Интегрирование некоторых других типов уравнений математической физики.

Б. М. Левитан (*Москва*) **и В. А. Марченко** (*Харьков*). **Спектральная теория дифференциальных операторов.** Доклад содержит обзор некоторых основных, интенсивно развивающихся за последнее десятилетие направлений спектральной теории дифференциальных операторов как обыкновенных, так и в частных производных.

В докладе мы останавливаемся на следующих четырех разделах спектральной теории дифференциальных операторов:

1. Различные варианты вывода формул разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных операторов.

Методы вывода этих формул можно разделить на две категории:

а) доказательства, использующие спектральную теорию самосопряженных операторов в пространстве Гильберта (идея этих доказательств в существенном восходит к работам Гильберта и Вейля (1910 г.);

б) доказательства при помощи предельного перехода от конечной области, восходящие по идее к работам Карлемана (1923 г.).

2. Асимптотические формулы для спектральных функций, сходимость и суммируемость разложений по собственным функциям.

До последнего времени сходимость разложений по собственным функциям обосновывалась независимо от решений нестационарных задач (метод Фурье). В ряде недавно вышедших работ явные формулы для решения нестационарных задач (аналогичные формулам Даламбера, Римана и Пуассона) с успехом используются для доказательства сходимости (суммируемости) разложений по собственным функциям и для вывода асимптотических формул спектральных функций дифференциальных операторов.

Эти новые методы приводят к необходимости уточнения ранее известных тауберовых теорем (оценка остатка), а также к тауберовым теоремам нового типа (для интегралов Фурье, для отношения функций и т. д.).

3. Спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов.

В работах Д. Биркгофа (1908) и Тамаркина (1917) была построена спектральная теория обширного класса обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов, заданных на конечном интервале.

За последнее десятилетие в теории несамосопряженных дифференциальных операторов были получены существенные достижения в следующих направлениях:

а) доказана полнота собственных и присоединенных функций для несамосопряженных дифференциальных операторов в частных производных, заданных в конечной области;

б) исследован спектр и доказана полнота собственных и присоединенных функций для некоторых классов несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов, заданных на бесконечном интервале.

4. Обратные задачи спектрального анализа дифференциальных операторов.

Некоторые приложения дифференциальных операторов к физике и технике привели к обратным задачам спектрального анализа, в которых требуется выяснить, какие спектральные свойства дифференциальных операторов однозначно их определяют, и дать методы восстановления операторов по этим свойствам.

В настоящее время обратные задачи решены с достаточной полнотой для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка.

Важным аппаратом, применяемым для исследования обратных задач, являются операторы типа Вольтерра:

$$f(x)=g(x)+\int_0^x K(x, t)\, g(t)\, dt, \qquad k(x)=h(x)+\int_x^\infty A(x, t)\, h(t)\, dt,$$

переводящие решение одного дифференциального уравнения вида $y''-q(x)y+\lambda y=0$ в решения уравнения того же вида, но с другой функцией $q(x)$.

Эти операторы позволили доказать наиболее общие теоремы об однозначной определенности дифференциальных операторов по их различным спектральным свойствам. Они же в соединении с идеей об ортогонализации, аналогичной идеям теории ортогональных многочленов, привели к эффективным методам восстановления дифференциального оператора.

Е. А. Леонтович-Андронова (Горький). **Некоторые направления исследований по качественной теории дифференциальных уравнений горьковской школы теории колебаний и перспективы развития этих направлений.** Общие замечания о характере работ по качественной теории дифференциальных уравнений школы А. А. Андронова.

1. Динамические системы в ограниченной плоской области и на поверхностях различного жанра: качественная структура разбиения на траектории и элементы, ее определяющие.

«Особые»—орбитно-неустойчивые—и «обыкновенные»—орбитно-устойчивые—траектории. Случай конечного числа особых траекторий: особые траектории разделяют всю совокупность траекторий на области, заполненные обыкновенными траекториями «одинакового поведения». Схема, определяющая качественную структуру разбиения на траектории. Замечания по поводу роли «особых» и «обыкновенных» траекторий в пространстве трех изменений. Работа А. Г. Майера и связанные с ней задачи. Распространение понятий особой и обыкновенной траекторий на случай неавтономных систем второго порядка.

2. Грубые динамические системы в ограниченной плоской области и на сфере. Негрубые системы и степень негрубости.

Расширение и уточнение понятия грубости динамической системы, данного А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным. Класс динамической системы: системы класса k и аналитического класса. Пространства динамических систем R_k^2 и R_a^2. Грубость динамической системы относительно пространств R_k^2 и R_a^2. Независимость необходимых и достаточных условий грубости динамической системы класса k от того, относительно какого пространства R_m^2, $m \leqslant k$ она определена. Множества точек, соответствующих грубым системам, пространств R_k^2 и R_m^2, являются открытыми множествами. Мера грубости и качественное интегрирование грубых систем путем приближенного построения особых траекторий. Негрубые динамические системы. Релятивная грубость. Понятие степени негрубости. Динамические системы, зависящие от параметров. Простейшие случаи рождения предельных циклов. Непрерывные методы.

Использование понятий грубости и степени негрубости для других объектов (грубость и негрубость функции, кривой, взаимного расположения двух кривых и т. д.). «Алгебраически грубые» динамические системы и трудности, возникающие при выводе необходимых условий «алгебраической грубости». Распространение понятия грубости динамической системы на случай неавтономных систем второго порядка и на случай динамических систем в трехмерном пространстве и возникающие при этом трудности.

В. В. Немыцкий (*Москва*). **Качественное исследование автономных систем дифференциальных уравнений.** 1. Одним из важных итогов исследований по качественной теории систем дифференциальных уравнений в довоенные годы явилось создание классификаций возможных решений по их предельному поведению. В частности, был детально изучен класс устойчивых по Пуассону решений и выделены и изучены такие важнейшие классы движений, как рекуррентные и почти периодические.

2. На очереди стоит вопрос о нахождении аналитических критериев для существования общих рекуррентных, почти-периодических и периодических решений у конкретно заданной системы. Основную роль в исследовании этого вопроса играет теорема существования Биркгофа, причем наиболее общие аналитические критерии могут быть получены с помощью применения топологического принципа Т. Важевского.

3. Для случая плоскости теорема существования Биркгофа непосредственно приводит к «принципу кольца», широко применяемому в нелинейной механике. В последнее время получены результаты относительно применимости этого принципа для пространства. Это, с одной стороны, критерии, основанные на применении функций, аналогичных функциям Ляпунова, и теоремы Боля—Брауэра о существовании неподвижной точки, а с другой—критерии существования почти периодических решений.

4. Наряду с разысканием отдельных классов решений может быть поставлен вопрос об исследовании конкретной системы в целом. Пока аналитические критерии получены для двух простейших классов дисперсивных систем и систем с одним притягивающим или отталкивающим центром.

5. Для того, чтобы перейти от этих простейших систем к более сложным, надо в первую очередь уметь исследовать систему в некоторой конечной окрестности особой точки. По аналитическим признакам все особые точки могут быть разделены на два типа: особые точки первого порядка и высшего порядка. Начало координат будет называться особой точкой первого порядка, если система может быть представлена в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_k + \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где матрица A не особая, а функции $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условию

$$\| \varphi \| \leqslant A(t, x) \| x \|$$

и $\| A(t, x) \|$ «достаточно малы» либо при $t \to \infty$, либо при $\|x\| \to 0$.

В этом классическом вопросе в последние годы произошел существенный сдвиг, именно, найдены условия гомеоморфизма некоторых семейств решений «вырожденной» и полной системы.

6. Для точек высшего порядка центральной темой является пока выделение типических случаев расположения. Большинство исследований проводится аналогично тому, как это делается для окрестности особой точки высшего порядка на плоскости (исследование окрестностей исключительных направлений и однородных систем на ∞). Однако имеются интересные попытки отойти от этих традиционных методов; таковы,

например, метод применения второй производной функции Ляпунова и чисто геометрический метод, применяемый в США для исследования особой точки в трехмерном пространстве.

7. На очереди стоит вопрос о выделении «грубых», устойчивых при изменении правых частей, картин расположения интегральных кривых в пространстве.

В. В. Немыцкий (*Москва*) **и М. М. Вайнберг** (*Москва*). **Нелинейные интегральные уравнения (современное состояние и перспективы).** 1. Исторически теория нелинейных интегральных уравнений, разработка которой была начата А. М. Ляпуновым и Э. Шмидтом, была вначале теорией уравнений с «малой нелинейностью», т. е. нелинейные интегральные операторы, входившие в уравнения, либо содержали малый параметр и обращались в нуль вместе с этим параметром, либо содержали малый по форме функциональный аргумент и обращались в нуль вместе с этим аргументом. При этом разыскивались решения, малые по норме. Нелинейные операторы, входившие в уравнения, представлялись в виде суммы линейного оператора с множителем λ и нелинейного оператора с параметром μ, который характеризовал малость этого нелинейного слагаемого.

Сразу же выяснилось существенное различие между тем случаем, когде λ—обыкновенное значение линейного оператора (общий случай), и случаем, когда λ—собственное значение линейного оператора (критический случай).

В критическом случае могла наблюдаться неединственность решения для достаточно малых μ. Это обстоятельство было выяснено в работах Э. Шмидта, А. Гаммерштейна, Л. Лихтенштейна, А. И. Некрасова и Р. Иглиша.

В последующее время работами Р. Иглиша и главным образом Н. Н. Назарова для аналитических интегральных операторов типа Гаммерштейна была создана достаточно далеко идущая теория, позволившая находить решения как в общем случае, так и для большого числа критических случаев.

В последнее время (1953—1954 гг.) в работах Дж. Кронин и Р. Бартля была сделана попытка перенести эти исследования на более общие операторные уравнения и получить результаты Шмидта и Назарова из общих теорем функционального анализа.

2. Теория нелинейных уравнений с «малой нелинейностью» привела к постановке следующего вопроса. Пусть дано нелинейное уравнение $\lambda\varphi=F(\varphi)$, для которого (λ_0, φ_0) является решением, существуют ли близкие к φ_0 решения этого уравнения, когда λ близко к λ_0, и сколько таких решений? Данный вопрос, рассмотренный в работах ранее указанных авторов для случая аналитических операторов, изучался позднее для неаналитических операторов. В последнем случае предполагалось, что оператор F имеет в точке φ_0 производную Фреше. В общем случае (когда λ_0 не является собственным значением производной Фреше) существование непрерывной ветви решений, примыкающей к (φ_0,λ_0), было установлено для операторов Гаммерштейна в 1939 г. М. М. Вайнбергом. Критический случай (когда $f(0)=0$ и $\varphi_0=0$) рассмотрел М. А. Красносельский. Оказалось, что в критическом случае важную роль играет четная или нечетная кратность собственного значения λ_0 оператора $F'(0)$. Если F—потенциальный оператор и $F'(0)$—самосопряженный положительно определенный оператор, то, как показали (вариационным методом) М. А. Красносельский и А. И. Поволоцкий, четная или нечетная кратность не играет роли, так как каждое собственное значение λ_0 оператора $F'(0)$ (при некоторых дополнительных ограничениях) является точкой бифуркации оператора F.

3. Рассмотренный выше вопрос привел к общей теории возмущений нелинейных операторов. Пусть дано уравнение

$$\lambda\varphi = O(\varphi) + \mu A(\varphi)$$

и пусть (λ_0, φ_0)—решение невозмущенного уравнения $\lambda_0\varphi_0=O(\varphi_0)$. Будут ли существовать решения у возмущенного уравнения при малых μ и сколько будет таких решений? Ответ на этот вопрос зависит от поведения оператора $B(\varphi,\lambda)=\lambda\varphi—O(\varphi)$ в окрестности значений (λ_0,φ_0). В таком общем виде вопрос был поставлен в работе Ж. Лерея и Ю. Шаудера. В работе этих авторов, а затем в работах Э. Роте, М. А. Красносельского и Дж. Кронин решение данного вопроса было связано со степенью отображении.

В последнее время в работах В. В. Немыцкого и Р. Г. Герчинского был выдвинут новый принцип, связывающий поставленный вопрос с общей теорией неявных операторных уравнений и выдвинувший на первый план такие свойства отображений, как локальную топологичность и открытость.

Отметим, что к числу первых работ, в которых содержалось применение теории неявных функций к нелинейным интегральным уравнениям, следует отнести кандидатскую диссертацию М. М. Вайнберга.

Следует, однако, признать, что приложение общей теории к интегральным уравнениям привело к конкретным результатам лишь в случае линейности невозмущенного оператора $O(\varphi)$.

4. Помимо теории возмущений, для нелинейных интегральных уравнений ставится проблема существования решения. В общем виде эта проблема может быть поставлена так. Пусть дано операторное уравнение $\Phi(\lambda, x)=0$; требуется установить существование пар (λ_0, x_0), удовлетворяющих этому уравнению. Если $\Phi(\lambda, 0)=0$, то вопрос сводится к отысканию таких пар (λ_0, x_0), для которых $\|x\|>0$. В таком виде проблему существования принято называть проблемой спектра и собственных функций нелинейных интегральных уравнений. Проблема спектра преимущественно рассматривалась, когда $\Phi(\lambda, x)=\lambda x-F(x)$.

Для решения проблемы существования решения были предложены различные методы. Первый метод, исходящий из принципа неподвижной точки преобразования, после работы Биркгофа и Келлога был развит в работах Ю. Шаудера и В. В. Немыцкого и применялся в работах многих авторов. В работах Ж. Лерея, Ю. Шаудера, Э. Роте и М. А. Красносельского было показано, что существование неподвижных точек преобразования следует из свойств степени этого преобразования.

Другие топологические принципы доказательства существования решений, которые используют идею частичной упорядоченности в функциональных пространствах, были указаны и использованы в работах Л. В. Канторовича и М. А. Рутмана. Применительно к нелинейным интегральным уравнениям это означало метод сравнения одного нелинейного интегрального оператора с другим (метод минорант и мажорант). Метод М. А. Рутмана, который использует развитую М. Г. Крейном теорию конусов в пространстве Банаха, был затем применен в работах М. А. Красносельского и других авторов.

Другим основным методом является вариационный метод. Вариационные методы применительно к нелинейным интегральным уравнениям впервые встречаются в работах Г. Фубини, Л. Лихтенштейна и А. Гаммерштейна. Эти авторы использовали схему, которую сейчас п инято называть методом Галеркина. Дальнейшее развитие вариационные методы олучили в работах М. Голомба, Л. А. Люстерника, Э. Роте, М. М. Вайнберга, В. И. Соболева и Э. С. Цитланадзе. Общая схема вариационного метода в том виде, в каком он известен сейчас, заключается в том, что по уравнению строятся такие функционалы, что их критические или условно критические точки являются решениями или прообразами решений рассматриваемого нелинейного уравнения. При этом важную роль играют потенциальные операторы. При нахождении условно критических точек использовалась теорема Л. А. Люстерника о том, что каждая обыкновенная условно экстремальная точка является и условно критической. При нахождении условно критических точек некоторых четных функционалов использовались методы Л. А. Люстерника. Упомянутая выше общая схема вариационного метода была предложена и развита в работах М. М. Вайнберга.

Помимо существования, можно ставить вопрос и о структуре спектра и множества собственных функций (В. В. Немыцкий, Н. Н. Назаров, М. А. Красносельский и др.).

5. Хорошо известны роль и значение спектра и собственных функций в теории линейных операторов. Для нелинейных операторов пока не выяснены роль и значение подобных понятий. Известно лишь, что некоторые точки спектра являются точками бифуркации, а последние представляют интерес для некоторых задач физики и механики (А. И. Некрасов, А. Н. Тихонов, М. А. Красносельский). Отметим еще, что В. И. Кондрашев указал на возможность выделения таких классов нелинейных операторов, у которых система собственных функций является полной.

6. Применение предложений, установленных для общих функциональных уравнений, к рассмотрению конкретных нелинейных интегральных уравнений требует проверки выполнимости различных условий. В связи с этим приходится изучать вопросы о компактности, о различных видах непрерывности и дифференцируемости специальных операторов в конкретных пространствах. Применение вариационных методов приводит к построению функционалов по этим специальным операторам и к проверке выполнимости для построенных функционалов тех условий, при которых имеет место обобщенная теорема Вейерштрасса о достижении функционалами своих граней. Ввиду этого снятие того или иного ограничения в общих предложениях нелинейного функционального анализа часто является решающим для приложений к исследованию конкретных уравнений.

Литература по нелинейному функциональному анализу за последние годы содержит много работ, в которых авторы устанавливают различные свойства конкретных операторов или снимают те или иные ограничения. К таким работам относятся некоторые работы В. И. Соболева, Э. С. Цитланадзе, Э. Роте, М. М. Вайнберга, М. А. Красносельского, Дольфа и других.

7. При решении различных вопросов теории нелинейных интегральных уравнений использовались приближенные методы—метод последовательных приближений, метод Ньютона, предложенный Л. В. Канторовичем и примененный в его работах и в работах его учеников, а также другие приближенные методы. Этим путем были установлены новые теоремы существования, причем для отдельных уравнений изучалась быстрота сходимости итерационного процесса.

8. Хотя теория нелинейных функциональных уравнений находится в начальной стадии своего развития, она уже выдвинула ряд математических проблем. Нам кажется, что в ближайшие годы эти проблемы привлекут внимание математиков не меньше, чем проблемы линейного функционального анализа.

О. А. Олейник (*Москва*). **Некоторые задачи теории нелинейных уравнений с частными производными и уравнения с малым параметром при старших производных.** 1. Задача Коши для нелинейных уравнений с частными производными в большой области с разрывными начальными условиями. Обобщенные решения некоторого класса нелинейных уравнений. Корректная постановка задачи Коши для этих уравнений в большой области.

2. Качественные свойства обобщенных решений задачи Коши для некоторых нелинейных уравнений.

3. Применение метода конечных разностей к построению обобщенных решений задачи Коши для нелинейных уравнений.

4. Связь обобщенных решений задачи с решениями задачи Коши некоторых дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной.

5. Краевые задачи для некоторых уравнений с частными производными, содержащих малый параметр при старших производных. Поведение решений этих задач при стремлении параметра к нулю.

К. П. Персидский (*Алма-Ата*). **Решение задачи Коши для некоторых функциональных уравнений.** При решении некоторых вопросов устойчивости решений дифференциальных уравнений, заданных в линейных нормированных пространствах, встречаются функциональные уравнения вида

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t,\ x+\Delta t f(t,\ x))-v(t,\ x)}{\Delta t}=\varphi(t,\ x), \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t,\ x+\Delta t f(t,\ x,\ v))-v(t,\ x)}{\Delta t}=\varphi(t,\ x,\ v), \tag{2}$$

где $v=v(t,\ x)$ — искомая функция от t и x с областью значений в некотором произвольно заданном, полном линейном нормированном пространстве N, t — вещественная переменная, область изменения переменной x принадлежит произвольно заданному полному линейному нормированному пространству M, а f и φ — заданные функции своих аргументов, области изменений которых принадлежат, соответственно, пространствам M и N.

Уравнение (1), которое является частным случаем уравнения (2), встречается, например, при построении функции Ляпунова $v=v(t, x)$ для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{3}$$

полная производная которой v' имеет заданное значение $\varphi(t, x)$. Уравнение же (2) встречается, в частности, при рассмотрении дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt}=\varphi(t, x, y), \tag{4}$$

если сделать замену

$$y=u+v(t, x) \tag{5}$$

и потребовать, чтобы правая часть уравнения

$$\frac{du}{dt}=\varphi(t, x, u+v)-v'$$

при $u=\theta_N$ (θ_N — нулевая точка пространства N) обращалась в θ_N.

В подобных задачах требуется, чтобы функция $v(t, x)$ удовлетворяла некоторым определенным условиям: например, в (5) функция $v(t, x)$ должна быть ограниченной при всех значениях $t \geqslant 0$. Таким образом, приходится отыскивать те частные решения уравнений (1) и (2), которые обладают необходимыми свойствами. Такие решения могут существовать, вообще говоря, лишь при выполнении определенных условий относительно правых частей уравнений (3) и (4).

В данном докладе дается решение задачи Коши для функциональных уравнений (1) и (2) в предположении, что функции f и φ удовлетворяют некоторым условиям. Смысл этих условий заключается в непрерывности относительно переменной t и выполнения условия Коши относительно остальных аргументов.

Пусть $x=\alpha(t, t_0, x_0)$ есть решение уравнения (3), проходящее через произвольно заданную точку (t_0, x_0); пусть $\omega(x)$ есть наперед заданная функция с областью значений в N и удовлетворяющая условию Коши.

Тогда уравнение (1) имеет лишь единственное решение

$$v(t, x)=\omega(\alpha(0, t, x))+\int_0^t \varphi(\tau, \alpha(\tau, t, x))\, d\tau, \tag{6}$$

которое при $t=0$ обращается в заданную функцию $\omega(x)$.

Пусть

$$x=\alpha(t, x_0), \quad y=\beta(t, x_0) \tag{7}$$

есть решение системы уравнений (4), начальные значения которого удовлетворяют условию $\alpha(0, x_0)=x_0$, $\beta(0, x_0)=\omega(x_0)$, где x_0 — произвольно заданная точка из M. Пусть $x_0=\theta(t, x)$ есть решение уравнения $x=\alpha(t, x_0)$ относительно x_0.

Тогда уравнение (2) имеет решение

$$v(t, x)=\beta(t, \theta(t, x)), \tag{8}$$

которое при $t=0$ обращается в заданную функцию $\omega(x)$.

Эти утверждения проверяются следующим образом. Функции $\alpha(t, t_0, x_0)$, $\alpha(t, x_0)$, $\beta(t, x_0)$ удовлетворяют условию Коши относительно переменной x_0; функция $\theta(t, x)$ удовлетворяет условию Коши относительно переменной x. Функции $\alpha(\tau, t, x)$, $\theta(t, x)$

являются интегралами, т. е.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(\tau, t+\Delta t, x+\Delta t f(t, x))-\alpha(\tau, t, x)}{\Delta t}=0,$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta(t+\Delta t, x+\Delta t f(t, x, v))-\theta(t, x)}{\Delta t}=0 \tag{9}$$

при $v=\beta(t, \theta(t, x))$.

Отсюда элементарно получается, что (6) есть решение уравнения (1); легко доказывается, что это решение единственное.

Так как

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\beta(t+\Delta t, x_0)-\beta(t, x_0)}{\Delta t}=\varphi(t, \alpha(t, x_0), \beta(t, x_0)),$$

то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\beta(t+\Delta t, \theta(t, x))-\beta(t, \theta(t, x))}{\Delta t}=\varphi(t, x, \beta(t, \theta(t, x))).$$

Отсюда, на основании (9), следует, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\beta(t+\Delta t, \theta(t+\Delta t, x+\Delta t f(t, x, v)))-\beta(t, \theta(t, x))}{\Delta t}\equiv$$
$$\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t, x+\Delta t f(t, x, v))-v(t, x)}{\Delta t}=\varphi(t, x, v)$$

при $v=\beta(t, \theta(t, x))$, т. е. (8) есть решение уравнения (2).

Если точка $v=v(\ldots, v_\gamma, \ldots)$ пространства N определяется конечным или бесконечным числом координат v_γ, где v_γ изменяется в некотором полном линейном нормированном пространстве A_γ, а γ принимает всевозможные значения из некоторого множества σ индексов, то тогда уравнение (2) обращается в систему уравнений

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_\delta(t+\Delta t, x+\Delta t f(t, x; \ldots, v_\gamma, \ldots))-v_\delta(t, x)}{\Delta t}=\varphi_\delta(t, x; \ldots, v_\gamma, \ldots), \tag{10}$$

где δ принимает всевозможные значения из σ.

Если точка $v=v(v_1, v_2, \ldots)$ пространства N определяется конечным или счетным числом вещественных или комплексных координат $v_1, v_2, \ldots$, а точка $x=x(x_1, x_2, \ldots)$ пространства M определяется также конечным или счетным числом вещественных или комплексных координат $x_1, x_2, \ldots$, то тогда уравнения (10) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial v_r(t, x_1, x_2, \ldots)}{\partial t}+\sum_s\frac{\partial v_r(t, x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_s}f_s(t, x_1, \ldots; v_1, \ldots)=$$
$$=\varphi_r(t, x_1, \ldots; v_1, \ldots)\quad (r=1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Чтобы левую часть уравнения (10) можно было переписать в виде левой части уравнений (11), необходимо на функции f_s и φ_r наложить некоторые дополнительные условия. Сущность этих условий заключается в существовании непрерывных производных первого порядка по величинам $x_1, x_2, \ldots; v_1, v_2, \ldots$ и выполнении «усиленного» условия Коши:

$$\|\psi(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, x'_m, x'_{m+1}, \ldots; v_1, \ldots, v_{m-1}, v'_m, v'_{m+1}, \ldots)-$$
$$-\psi(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, x''_m, x''_{m+1}, \ldots; v_1, \ldots, v_{m-1}, v''_m, v''_{m+1}, \ldots)\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_m(\Delta x_m+\Delta v_m)\quad (m=1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где ψ — любая функция из системы функций f_s и φ_r, а

$$\Delta x_m=\|x(x_1, \ldots, x'_m, x'_{m+1}, \ldots)-x(x_1, \ldots, x''_m, x''_{m+1}, \ldots)\|_M,$$
$$\Delta v_m=\|v(v_1, \ldots, v'_m, v'_{m+1}, \ldots)-v(v_1, \ldots, v''_m, v''_{m+1}, \ldots)\|_N$$
$$(m=1, 2, \ldots)$$

и $\varepsilon_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Если функции f_s и φ_r голоморфны при

$$\|x\|_M \leqslant R, \quad \|v\|_N \leqslant R$$

относительно каждой величины $x_1, x_2, \ldots; v_1, v_2, \ldots$ и удовлетворяют условию (12), то тогда искомые функции

$$v_1 = v_1(t, x_1, x_2, \ldots), \quad v_2 = v_2(t, x_1, x_2, \ldots), \ldots$$

будут голоморфными относительно совокупности величин $x_1, x_2, \ldots$, если только величина t достаточно мала. Чтобы это свойство имело место, например, при всех значениях $t \geqslant 0$, необходимы некоторые дополнительные условия. Эти условия связаны с устойчивостью решений уравнений (1) и (2).

И. Г. Петровский (*Москва*), **И. М. Гельфанд** (*Москва*) **и Г. Е. Шилов** (*Москва*). **Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными.**

И. Г. Петровский (*Москва*) **и Е. М. Ландис** (*Москва*). **Предельные циклы.**

С. Л. Соболев (*Москва*), **М. И. Вишик** (*Москва*). **Некоторые функциональные методы в теории уравнений с частными производными.** 1. Расширение классического понятия функции при помощи введения функционалов (обобщенных функций) над гладкими финитными функциями. Расширение простейших операторов—дифференцирования и умножения на функцию—на обобщенные функции. Понятие решения дифференциального уравнения в обобщенных функциях. Определение решений краевых задач в классе обобщенных функций. Примеры решения задачи Коши и некоторых задач в различных классах обобщенных функций.

2. Пространства функций, производные которых интегрируемы с данной степенью. Связь этих пространств между собой. Теоремы вложения.

3. Инвариантность классов W_p^l при подстановке в сложные функции. Применение к нелинейным дифференциальным уравнениям.

4. Полуограниченные краевые задачи. Единый метод расширения операторов, соответствующих этим задачам. Существование и единственность решения задачи в случае положительной определенности вещественной части соответствующего оператора. Свойства фредгольмовости в общем случае. Примеры исследования разрешимости некоторых краевых задач для эллиптических уравнений.

5. Дифференциальные свойства решений. Теоремы локального типа. Гладкость решений эллиптических уравнений внутри области. Дифференциальные свойства решений краевых задач вплоть до границы. Оценки норм производных через нормы правой части.

6. Смешанные краевые задачи и нестационарные операторные уравнения. Связь между решениями смешанных задач и задачей Коши для обыкновенного уравнения (с аргументом t) в функциональном пространстве. Функциональные методы доказательства существования и единственности решения задачи Коши для операторных нестационарных уравнений. Качественное исследование траектории (решения задачи Коши) при больших значениях t.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Н. И. Ахиезер (*Харьков*). **Экстремальные свойства целых трансцендентных функций конечной степени.** Результаты, излагаемые в настоящем докладе, получены в последние годы в Харькове (автором, Б. Я. Левиным, частично В. А. Марченко и частично их учениками). Эти результаты связаны с вопросами конструктивной теории функций, в которой в качестве элементарной базы принята целая трансцендентная функция конечной степени вместо алгебраического многочлена или конечной тригонометрической суммы.

Доклад состоит из четырех разделов, которые посвящены: 1) построению общего вида интерполяционных формул для целых трансцендентных функций конечной степени и обобщению с помощью этих формул теоремы М. Картрайт; 2) построению целых трансцендентных функций конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля на всей вещественной оси при некоторых дополнительных условиях; 3) изучению взвешенного приближения растущих функций на всей вещественной оси посредством целых трансцендентных функций конечной степени; 4) обобщениям теоремы Винера—Палея и некоторым применениям этих обобщений.

Н. К. Бари (*Москва*). **Тригонометрические ряды.** Проблемы теории тригонометрических рядов настолько разнообразны, что нет возможности овхватить их в одном докладе. Поэтому приходится ограничиться указанием основных направлений, в которых ведутся исследования.

1. Изучение сходимости рядов Фурье:

а) для суммируемой функции, у которой сопряженная также суммируема;

б) для функции с интегрируемым квадратом (при тех или иных множителях Вейля);

в) для функций непрерывных (новые признаки равномерной сходимости, случаи расходимости, несмотря на дополнительные ограничения);

г) сходимость ряда Фурье на множестве и расходимость вне его;

д) условия для абсолютной сходимости ряда Фурье (в терминах наилучших приближений, модулей непрерывности, для ряда Фурье от суперпозиции двух функций и др.).

2. «Исправление» функции с целью улучшения поведения ее ряда Фурье:

а) изменения, которыми можно достигнуть равномерной сходимости;

б) изменения, дающие сходимость почти всюду;

в) «принцип локализации» на множествах (для функций с интегрируемым квадратом).

3. Проблема изображения функции тригонометрическим рядом:

а) изображение тригонометрическим рядом функции, измеримой и конечной почти всюду;

б) случай функции, принимающей значения $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры;

в) универсальные ряды.

4. Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд:

а) новые достаточные условия для M-множеств;

б) новые методы для построения совершенных U-множеств;

в) роль теории алгебраических чисел в проблеме единственности.

5. Исследование поведения множеств меры нуль с точки зрения различных проблем теории тригонометрических рядов:

а) проблемы единственности;

б) проблемы абсолютной сходимости;

в) сходимости ряда с коэффициентами, не стремящимися к нулю;

г) сходимости ряда Фурье для функций из L^2 (при специальных множителях Вейля).

Понятие емкости множества.

6. Изучение коэффициентов тригонометрического ряда:

а) свойства коэффициентов, вытекающие из изучения частных сумм ряда;

б) условия, при которых данная последовательность чисел есть последовательность коэффициентов Фурье;

в) быстрота стремления к нулю коэффициентов всюду расходящихся рядов, нуль-рядов и др.

7. Обобщения понятия интеграла и их применение к тригонометрическим рядам:

а) A-интеграл;

б) интегрирование суммы всюду сходящегося ряда.

Заметим, что имеется целый ряд работ, относящихся к теории тригонометрических рядов, которые не затронуты в наших тезисах.

Е. В. Вороновская (*Ленинград*). **Некоторые задачи чебышевской школы в свете современных функционально-аналитических методов.** 1. В задачах на полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля в данном интервале, нет объединяющей общей точки зрения, отсутствует единый аналитически конструктивный аппарат; с чисто качественной стороны еще не произведено упорядочения хаотической области полиномов (хотя бы целых алгебраических), которые вообще могут разрешать тот или иной вопрос в теории наилучшего приближения.

2. Задачи В. А. Маркова, Е. И. Золотарева (также А. П. Пшеборского и Н. И. Ахиезера) и вообще всякая задача, в которой ищется полином, наименее отклоняющийся от нуля на данном интервале при условии некоторых данных (совместных) зависимостей между коэффициентами, выраженных в виде $\varphi_i(p_n, p_{n-1}, \ldots, \ldots, p_0)=0$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, приводятся к следующей задаче функционального анализа: пусть функционал F задан на области $\{P_n(x)\}$ полиномов n-й степени с основным интервалом $[0, 1]$, и N есть его норма. Требуется найти полином $Q_n(x)$, для которого $F(Q_n)=+N$ при условии $\max\limits_{[0,1]}|Q_n(x)|=1$. Полином $Q_n(x)$ назван экстремальным полиномом для F.

3. При специальном выборе область функционалов и область соответствующих им экстремальных полиномов обладают изоморфными свойствами, позволяющими качественно изучить и расклассифицировать все множество экстремальных полиномов с помощью определяющих их функционалов. Этим же методом можно построить дифференциальные уравнения семейств изучаемых полиномов, определяющих их коэффициенты как функции от параметров этих семейств.

4. Объединяющая теория автора и ее метод вскрывают существо всех простейших задач на полиномиальные минимаксы. В частности, будучи приложен к задачам Е. И. Золотарева и им подобным, метод функционалов дает для этих задач вполне единообразное решение в виде аналогичных систем сильно переопределенных дифференциальных уравнений, в которых существование и единственность решений заранее гарантированы.

М. М. Джрбашян (*Ереван*). **Исследования по теории обобщенных интегральных преобразований в комплексной области и по теории целых функций.** За последние три года автором был выполнен цикл работ, посвященных теории обобщенных интегральных преобразований в комплексной области и теории целых функций. Результаты этих работ, в основном опубликованные, органически связаны между собой; доклад посвящается их краткому обзору.

В докладе предполагается остановиться на следующих вопросах.

1. Построение прямых и обратных интегральных преобразований в классе L_2 с ядрами особого типа, являющихся естественным обобщением преобразований Фурье на системе лучей в комплексной области. Сохранение основных положений теории Планшереля—Ватсона для построенных преобразований.

2. Использование обобщенных преобразований для построения аппарата приближения целыми функциями в классе L_2 на системе лучей комплексной области.

3. Распространение полученных результатов на функции многих переменных (эти результаты получены аспирантом А. Е. Аветисяном).

4. Обычная сходимость и суммируемость обобщенных интегральных преобразований.

5. Параметрическое представление целых функций произвольного порядка, принадлежащих к классу L_2 на системе лучей в комплексной области (обобщения известной теоремы Палея и Винера). Связь таких представлений с обобщенными преобразованиями.

6. Изучение некоторых специальных классов целых функций многих переменных, имеющих различные порядки и типы роста по отдельным переменным, и их интегральные представления.

7. Параметрические представления для некоторых классов целых функций многих переменных, удовлетворяющих дополнительным условиям интегрируемости квадрата модуля на системе лучей.

В. Я. Козлов (*Москва*). **Ортогональные и биортогональные системы функций.** Задача о разложении произвольной функции какого-либо класса в ряд по заданной системе функций возникла вместе с основными понятиями классического анализа.

В первый период развития анализа эта задача была тесно связана со степенными рядами, но вскоре различные задачи математики и в первую очередь прикладные задачи привели к необходимости разлагать функции различных классов по тригонометрической системе и другим ортогональным и биортогональным системам.

За последнее время задачи математической физики с новой остротой поставили проблему разложения функций по неортогональным системам. Для выяснения возможностей такого разложения широко используются методы теории функций комплексного переменного и функционального анализа.

В работах по ортогональным и биортогональным системам за последнее время разрабатывались следующие основные проблемы и задачи.

I. Ортогональные системы.

1) Сходимость и суммируемость рядов по ортонормированным системам, множители сходимости, множители суммируемости, точные множители сходимости, расходимость рядов по ортогональным системам.

2) Ортогональные системы функций, образующие группу по умножению. Проблема сходимости рядов по таким системам. Проблема единственности разложения.

3) Необходимые и достаточные условия полноты ортонормированных систем. Необходимые условия полноты, локальная характеристика полных ортогональных систем.

II. Биортогональные системы элементов в пространстве Банаха.

1) Минимальность системы, равномерная минимальность системы, линейная независимость системы, полнота, замкнутость. Проблема существования базисов.

2) Необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная система элементов была базисом, минимальной системой, равномерно минимальной системой, линейно независимой, полной, замкнутой и т. д. Полнота метрического пространства базисов.

3) Базисы суммирования. Свойства базисов суммирования. О перестановке членов ряда, составленного из элементов пространства Банаха.

III. Биортогональные системы в пространстве L_2.

1) Необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная система функций была базисом в пространстве L_2, минимальной системой и т. д.

2) Классификация базисов, базисы Гильберта, Бесселя, Фишера—Рисса. Свойства базисов Фишера—Рисса. О перестановке элементов базиса. Существование базисов Гильберта и Бесселя. Параболические базисы и их обобщения. Общий вид параболических базисов.

IV. Устойчивость различных свойств систем функции в пространствах L_2 и C.

Близость систем функций в смысле Винера. Близость систем функций в смысле Н. К. Бари. Близость систем функций в смысле Хильдинга. Близость систем функций в смысле Крейна, Мильмана и Рутмана в пространстве C. Различные обобщения понятия близости. Свойства близких систем.

V. Обобщенные тригонометрические системы.

Полнота обобщенных тригонометрических систем в пространстве L_p. Условия, при которых такие системы образуют базис. О проблеме единственности разложения в ряды по таким функциям.

VI. A-совершенные системы функций.

1) Полнота A-совершенной системы функций. Условия, при которых такие системы образуют базис Банаха или базис суммирования. Преобразование Мебиуса и связь A-совершенных систем с теорией чисел. Работы Романова.

2) О сходимости почти всюду рядов по простейшим A-совершенным системам. О равномерной сходимости рядов по таким системам.

А. Н. Колмогоров (*Москва*). **Некоторые принципиальные вопросы приближенного и точного представления функций одного и нескольких переменных.** 1. Вопрос о трудности указания с точностью до ε функции f из некоторого класса F может рассматриваться с точки зрения содержащегося в таком указании «количества информации». Естественной характеристикой класса F с этой точки зрения является функция

$$I_F^a(\varepsilon) = \log N_F^a(\varepsilon),$$

где $N_F^a(\varepsilon)$ есть минимальное число точек в ε-сети на F. В докладе собраны опубликованные ранее и полученные вновь оценки роста функции $I_F^a(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ для некоторых классов аналитических функций и функций, обладающих заданным числом производных.

Дальнейшее развитие подобных исследований представляется существенным в частности, с точки зрения выработки правильных представлений о принципиальных возможностях различных употребительных в вычислительной математике способов приближенного задания функций, их введения в машины и сохранения в памяти машин.

При оценке пропускной способности каналов связи, передающих сигналы в виде непрерывных функций времени, принадлежащих классу F, естественно возникает вопрос о максимальном числе $N_F^c(\varepsilon)$ «хорошо отличимых сигналов», т. е. функций класса F, находящихся в надлежащей метрике попарно на расстоянии $> \varepsilon$. Асимптотическое поведение функции $N_F^c(\varepsilon)$ в рассмотренных случаях вполне аналогично асимптотическому поведению функции $N_F^a(\varepsilon)$. Достаточно далеко продвинутое исследование асимптотического поведения

$$I_F^c(\varepsilon) = \log N_F^c(\varepsilon),$$

повидимому, может привести к выяснению некоторых трудных вопросов теории передачи информации по каналам связи (например, вопроса о реальном содержании так называемой теоремы Котельникова) даже без обращения к понятиям теории вероятностей.

2. Вторая часть доклада посвящена ряду специальных задач приближенного и точного представлений функций нескольких переменных при помощи различного

вида формул, в которые входят лишь произвольные функции меньшего числа переменных. Одной из таких проблем является проблема приближения функций двух переменных «номографируемыми» функциями, т. е. функциями

$$z=\varphi(x, y),$$

которые могут быть заданы соотношением

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) & 1 \\ c(y) & d(y) & 1 \\ e(z) & f(z) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Описаны различные возможные подходы к такого рода задачам и систематизированы полученные разными авторами результаты. В виде примера скрывающихся здесь даже в простейших задачах неожиданностей можно привести два недавних результата В. И. Арнольда, относящихся к представлению функций двух переменных функциями вида

$$\chi(\varphi(x)+\psi(y)) \tag{1}$$

с непрерывными χ, φ и ψ. Пусть

$$E(f)=\inf_{\chi, \varphi, \psi} \sup_{x,y} |f(x, y)-\chi(\varphi(x)+\psi(y))|.$$

В. И. Арнольд доказывает, что существуют а) непрерывные функции с $E(f)>0$, б) непрерывные функции $E(f)=0$, но тем не менее не представимые в виде (1).

3. К специальным задачам из п. 2 примыкает выдвинутая Гильбертом проблема существования функций нескольких переменных, не представимых никакими конечными, хотя бы и сколь угодно сложными, суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. В применении к функциям четырех переменных получен неожиданный результат: любая непрерывная функция четырех переменных представима в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{r=1}^{r=4} \chi_r(x_4, \varphi_r(x_1, x_2, x_3), \psi_r(x_1, x_2, x_3)),$$

где функции χ_r, φ_r и ψ_r непрерывны. Возможно ли представление произвольной функции трех переменных в виде суперпозиции конечного числа непрерывных функций двух переменных — неизвестно (если бы такая возможность была доказана, то это означало бы полное решение так называемой 13-й проблемы Гильберта). Доказано лишь, что любая непрерывная функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть с любой точностью аппроксимирована функцией вида

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3)=\sum_{r=1}^{i=2} \theta_r(x_3, \chi_r(\varphi_r(x_3, x_1), \psi_r(x_3, x_2))),$$

где функции θ_r, χ_r, φ_r и ψ_r непрерывны.

Остается неизвестным положение в случае, если на входящие в суперпозиции функции наложить ограничения характера существования у них заданного числа производных. А. Г. Витушкиным было лишь доказано существование таких функций, что при их представлении суперпозициями функций меньшего числа переменных происходит неизбежная потеря степени их гладкости. Результаты А. Г. Витушкина нашли прозрачное объяснение с точки зрения оценок роста функций $N_F^a(\varepsilon)$, которым посвящена первая часть доклада.

П. П. Куфарев (*Томск*). **Методы и результаты теории однолистных функций.** 1. Теорией однолистных функций в настоящее время называют область теории конформных отображений, в которой изучаются так называемые внутренние задачи этой теории.

Задачи об экстремумах различных непрерывных функционалов, определенных на тех или иных классах однолистных функций, заданных в данной односвязной области; в частности, проблемы искажений при отображениях, исследование свойств коэффициентов ряда Тейлора (Лорана) для классов функций, однолистных в круге (вне круга); задачи о покрытиях заданных множеств точек образами круга при отображениях его функциями данного класса; разыскание достаточных, необходимых условий однолистности функций; изучение линий уровня, границ их выпуклости, звездообразности, их кривизны и т. д.; свойства отрезков ряда Тейлора для функций, однолистных в круге; характеристика различных специальных классов однолистных функций; с другой стороны, распространение методов и результатов теории однолистных функций на более общие классы функций; исследование в тех же направлениях функций, однолистных в многосвязных областях,—таковы основные вопросы современной теории однолистных функций.

2. В этих направлениях как советскими математиками, так и математиками других стран по существу в совместной работе достигнуты значительные успехи. Основной целью доклада является характеристика того, что сделано в теории однолистных функций советскими математиками. Вместе с тем это в достаточно полной мере будет характеризовать и общее состояние теории.

3. В Советском Союзе развиты многообразные методы исследования вопросов теории однолистных функций и получено весьма большое количество существенных результатов. В докладе дается обзор результатов работ советских авторов (а также и основных результатов иностранных авторов).

Построение доклада основано на характеристике методов теории однолистных функций.

4. Одним из первых методов исследования экстремальных и других задач теории конформного отображения, развитых в Советском Союзе, является вариационно-геометрический метод М. А. Лаврентьева. Основные для метода оценки вариации производной от функции, отображающей данную область на круг, при вариации области являются наиболее точными из существующих оценок. Метод дал возможность получить решение ряда экстремальных задач, например, задачи о максимуме растяжения при отображении на круг области, не содержащей n заданных точек, задач о покрытии отрезков и т. д. Существенно в методе наличие оценок производной отображающей функции на границе, что позволило получать решение не только внутренних задач, но и таких важных для приложений экстремальных задач, в которых рассматриваются функционалы, зависящие непосредственно от граничных свойств области. Метод нашел применение в прикладных вопросах.

5. Наибольшее количество законченных результатов в теории однолистных функций получено при помощи метода параметрического представления, основанного на аппроксимации однолистных функций решениями известного уравнения Лёвнера и весьма детально разработанного советскими математиками (Г. М. Голузин, И. Е. Базилевич и др.). На этом пути дано много точных оценок различных функционалов для класса S функций $f(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$, однолистных (и голоморфных) в круге $|z|<1$, для функций $F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\ldots$, однолистных в $|\zeta|>1$, для различных подклассов этих функций. Точная оценка $|\arg f'(z)|$ в классе S — первая из трудных задач, решенных этим методом. Оценки сумм модулей значений функций, ее производной; оценка отношений конечных приращений $\left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|$ для функций класса Σ и подкласса Σ_m функций с равномерно ограниченным снизу модулем; различные другие усиления теорем искажения; определение так называемых мажорантных областей для различных функционалов, определенных на тех или иных классах однолистных функций, —таковы лишь примеры результатов, достигнутых методом параметрического представления.

В связи с развитием метода параметрического представления в Советском Союзе было также выполнено детальное изучение свойств решений уравнений типа Лёвнера.

6. В 1946 г. Г. М. Голузин предложил новый вариационный метод исследования экстремальных задач теории однолистных функций, установив простую формулу для вариации функции, отображающей круг на односвязную область, при вариации границы области. Для весьма широкого класса задач метод приводит к дифференциальному уравнению для экстремальных функций, откуда следует важный качественный результат, что экстремальные области получаются из плоскости проведением разрезов по конечному числу аналитических дуг.

Метод был использован для исследования многих задач, причем в некоторых задачах удалось довести решение до конца. Применяя главным образом этот метод, ряд авторов исследовал некоторые экстремальные задачи для отображений непересекающихся областей.

7. В недавнее время были предприняты попытки объединения методов параметрического представления и вариационного метода Г. М. Голузина. Определенные результаты в этом направлении были получены в 1951 г. К. А. Лебедевым. Некоторый объединяющий метод предложен докладчиком.

8. Несмотря на наличие указанных выше и других сильных методов, многие задачи, поставленные в теории однолистных функций, еще не получили точного решения. Игравшая до сих пор весьма значительную роль в направленности теории однолистных функций задача оценки коэффициентов функций классов S также является нерешенной задачей, хотя и получила решение для ряда частных случаев.

В связи с этим возникли методы получения оценок не точных, но возможно более приближающихся к ожидаемым точным оценкам. В этом направлении наиболее хорошие результаты доставило применение метода оценок средних значений тех или иных геометрических характеристик отображений (метод интегральных средних). В частности, так получены оценки, наиболее приближающиеся к точным, коэффициентов функций класса S, исследован вопрос о взаимоотношениях между порядком роста подпоследовательностей коэффициентов и т. д.

9. Значительное количество работ посвящено изучению функций, однолистных в многосвязных областях. Здесь определенные результаты дало применение метода контурного интегрирования, использующего свойства специальных отображений, функций Грина, интеграла Дирихле. В ряде работ получил распространение на случай двусвязных областей метод параметрического представления, а также и вариационный метод Г. М. Голузина.

10. Некоторые свойства разнообразных классов функций (и не только однолистных) дал возможность изучить метод интегральных представлений. С его помощью были предприняты исследования типично-вещественных функций (Г. М. Голузин), типично-вещественных функций порядка p (С. А. Гельфер), различных специальных классов функций, аналитических в круге, в круговом кольце (В. А. Зморович), и т. д.

11. Отметим еще метод мажорант, использующий свойства так называемых подчиняющих функций. Этот метод сыграл, в частности, большую роль в изучении вопросов о покрытиях (например, в работах А. Ф. Берманта).

12. Таковы основные методы теории однолистных функций, развитые советскими математиками, и направления применения их.

Конечно, все многоообразие их этим не исчерпывается. Так, в частности, заслуживает внимания метод изучения условий однолистности аналитических функций при помощи производной Шварца, приведший к установлению некоторых достаточных условий однолистности, методы исследования областей однолистности отрезков ряда Тейлора для однолистных функций и т. д.

13. Методы теории однолистных функций были применены и для изучения других классов аналитических функций—конечно-листных, конечно-листных в среднем, ограниченных и др.

14. Заканчивая на этом тезисы доклада и констатируя значительные успехи теории однолистных функций, отметим, что некоторые методы и результаты теории нашли применение в изучении вопросов прикладных наук (гидромеханики, теории фильтрации). Одной из задач дальнейшего развития теории однолистных функций является расширение этого круга вопросов.

М. А. Лаврентьев (*Москва*). **Квази-конформные отображения.** 1. Введение. Понятие квази-конформного отображения и его происхождение. Два основных направления развития теории квази-конформных отображений—топологическое и аналитическое. Связь этих направлений между собой и с другими областями анализа и геометрии.

2. Отображения с ограниченными искажениями. Теория внутренних отображений. Понятие ограниченного искажения и основные теоремы компактности и дифференцируемости. Инвариантность типа при отображениях с ограниченными искажениями и принцип склеивания. Приложения к теории аналитических функций. Дальнейшие теоретико-множественные проблемы. Случай пространства, отображения с малым искажением. Геометрические приложения и вариационные принципы.

3. Однородные системы уравнений и отображения. Квази-конформные отображения, соответствующие данной системе уравнений с частными производными. Случай линейных систем—обобщенные решения, теория существования и единственности. Случай неоднородных систем, экстремальные принципы, устойчивость.

4. Общая задача квази-конформных отображений плоских областей. Теория существования и единственности для сильно эллиптических систем. Устойчивость решений. Проблема униформизации решений некоторых классов уравнений второго порядка. Квази-конформные отображения для уравнений смешанного типа—проблема Сопла устойчивости в разных классах решений.

5. Геометризация теории систем трех уравнений. Некоторые классы квази-конформных отображений трехмерных областей и их свойства. Общая постановка.

Б. Я. Левин (*Харьков*). **Распределение корней целых функций.** 1. Классические теоремы о связи между распределением корней целой функции и ее ростом. Некоторые задачи, сводящиеся к распределению корней целых функций.

2. Функции вполне регулярного роста на плоскости и внутри угла. Их экстремальные свойства.

3. Распределение корней некоторых экспоненциальных сумм и, в частности, корней почти периодических функций.

4. Целые функции конечной степени, ограниченные на оси (функции класса А).

5. Вопросы единственности определения целой функции, интерполяция и полнота систем целых функций в комплексной плоскости.

6. Проблема Гурвица для целых функций.

7. Неравенства для целых функций, аналогичные неравенствам А. А. Маркова, В. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. Общий вид операторов, сохраняющих неравенства.

А. Ф. Леонтьев (*Москва*). **Последовательности полиномов Дирихле.** 1. Существует значительная литература, посвященная изучению общих рядов Дирихле $\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, частным случаем которых являются ряды Тейлора. Наиболее полно изучены общие ряды Дирихле в случае, когда показатели λ_n образуют измеримую последовательность, т. е. когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$.

2. Аппарат рядов Дирихле оказался, однако, недостаточным для разрешимости ряда вопросов. Так, при исследовании разностных или, более обще, дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами приходится иметь дело со следующим обстоятельством: уравнение имеет бесконечно много частных решений вида $e^{-\lambda_n z}$ $(n=1, 2, \ldots)$, общее решение в общем случае не выражается рядом из частных решений, а представляется в форме предела последовательностей

полиномов Дирихле

$$P_n(z)=\sum_{j=1}^{p_n} a_{n_j} e^{-\lambda_j z} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

3. В связи с этим возникла необходимость изучения свойств сходящихся последовательностей полиномов Дирихле при следующих условиях: 1) показатели λ_n — не обязательно корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциально-разностного уравнения, система $\{e^{-\lambda_n z}\}$ не является полной во всей плоскости; 2) последовательность равномерно сходится в области, где система $\{e^{-\lambda_n z}\}$ не полна (в противном случае нельзя, по существу, говорить о каких-либо свойствах последовательности (1)).

4. Предельные функции $P(z)$ последовательностей вида (1) удовлетворяют дифференциальному уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Подобные уравнения изучались в свое время Риттом, Полиа, Валироном и др. Полиа, в частности, показал, что если характеристическая функция первого порядка — минимального типа, то область существования любого решения уравнения выпукла.

5. Дальнейшее исследование как уравнения бесконечного порядка, так, в основном, и последовательностей (1) проводилось в последнее десятилетие (Гельфонд, Каган, Леонтьев и др.). Показано было, что система $\{e^{-\lambda_n z}\}$ в классе функций, представимых в форме пределов последовательностей полиномов Дирихле, образует базис в широком смысле. Было обнаружено, что если последовательности (1) сходятся в области, где система $\{e^{-\lambda_n z}\}$ не полна, то тогда они сходятся в более широкой области. Например, если λ_n действительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}=\sigma$, то тогда из сходимости в круге радиуса, большего $\pi\sigma$, следует сходимость в полуплоскости. Многие свойства функций, представимых рядами Дирихле, оказались справедливыми для функций, представимых посредством последовательностей полиномов Дирихле. Из результатов относительно последовательностей (1) вытекают в качестве непосредственных следствий многие известные теоремы из теории рядов Дирихле. Вместе с тем были обнаружены свойства, не присущие рядам Дирихле. Так, если ряд Дирихле с действительными показателями сходится, как известно, в полуплоскости, то последовательности (1) могут сходиться в бесконечной области, не сходясь ни в какой полуплоскости.

6. Изучение последовательностей полиномов Дирихле позволило продвинуть вперед ряд других вопросов теории функций: например, позволило глубже понять структуру общего решения дифференциально-разностных уравнений, с помощью его удалось решить некоторые новые интерполяционные задачи. Мандельбройт с большим успехом использовал некоторые свойства рассматриваемых функций для решения проблемы обобщенной квазианалитичности, обобщенной проблемы единственности и т. д.

7. Наряду с последовательностями вида (1), порожденными системой $\{e^{-\lambda_n z}\}$, стали в последнее время изучать последовательности, порожденные системой $\{f(\lambda_n z)\}$.

Представляет большой интерес изучение последовательностей, порожденных и другими неполными системами функций.

С. М. Никольский (*Москва*). **Приближение функций многих переменных полиномами.** 1. Прямые и обратные задачи о приближении классов функций.

2. Изучение методами приближения полиномами связи свойств функций многих переменных в различных метриках или связи свойств функций, определенных в области, с их граничными свойствами (теоремы вложения).

3. Неравенства для приближающих полиномов. Вопросы устойчивости дифференциальных свойств функций.

4. Связь с некоторыми краевыми задачами математической физики, в частности, с прямыми методами решения вариационных задач.

5. Вопросы приближения алгебраическими многочленами. Стоящие здесь задачи.

П. С. Новиков (*Москва*) **и Л. В. Келдыш** (*Москва*). **О некоторых проблемах дескриптивной теории множеств.**

I часть. 1. Трудности, возникшие в теории множеств при неограниченном употреблении понятия бесконечности. Аксиома произвольного выбора и связанные с ней трудности. Идея трансфинитного числа.

2. Критика основ теории множеств во французской школе. Критика принципа произвольного выбора и идеи трансфинитного. Дискуссия о теореме Цермело в пяти письмах Адамара, Бэра, Бореля и Лебега. Попытка Лебега ввести понятие «эффективного» или «называемого» множества. Поставленная Борелем проблема о построении эффективного множества, в котором невозможно указать ни одной точки, но нельзя в то же время доказать его пустоту.

3. Работы московской школы теории множеств, руководимой Н. Н. Лузиным, по исследованию эффективных множеств. Различные классы эффективных множеств: B-множества, A-множества, C-множества и операции над множествами. Измеримость и свойство Бэра для этих классов множеств. Трудности, возникшие при изучении вопроса о мощности CA-множеств.

4. Принадлежащий Н. Н. Лузину анализ трудностей, связанных с изучением эффективных множеств. Его высказывания о роли отрицательного определения и связи его с положительным определением, данным с использованием совокупности всех трансфинитных чисел второго класса. Открытие проективных множеств. Высказанные Н. Н. Лузиным утверждения о невозможности доказать измеримость произвольного проективного множества и наличие в нем совершенного подмножества. Проективные резольвенты и их связь с проблемой Бореля.

II часть. 1. Современные подходы к разрешению трудностей, возникших в теории множеств. Идеи Гильберта о непротиворечивости.

2. Работа Гёделя о непротиворечивости принципа выбора и континуум гипотезы.

3. Результат П. С. Новикова о непротиворечивости утверждения о существовании неизмеримых проективных множеств и некоторых других утверждений дескриптивной теории множеств.

4. Значение этих работ для аксиоматических вопросов анализа и теории множеств.

В. П. Потапов (*Одесса*). **Аналитические матрицы функций.** 1. Дробно-линейные преобразования матриц. Работы Зигеля и Хуа Ло-кена. Дробно-линейные преобразования нерастягивающих и J-нерастягивающих матриц.

2. Нерастягивающие и J-нерастягивающие аналитические матрицы-функции. Элементарные множители и задача о представлении любой нерастягивающей аналитической матрицы-функции в виде произведения элементарных множителей (обобщение теоремы Рисса—Герглотца). Частный случай целой нерастягивающей матрицы-функции. Проблема единственности.

3. Характеристическая матрица-функция несамосопряженного линейного оператора, введенная М. С. Лившицем. Связь мультипликативного представления характеристической матрицы-функции с приведением несамосопряженного оператора к треугольному виду. Задача о приведении некоторых классов вполне непрерывных несамосопряженных операторов к жордановой форме.

Обратная задача для систем линейных дифференциальных уравнений в конечном интервале.

Б. А. Фукс (*Москва*). **Некоторые новые результаты в теории функций многих комплексных переменных.** Из большого числа фактов, установленных за последнее время в теории функций многих комплексных переменных, предполагается остановиться лишь на результатах, относящихся к следующим вопросам.

1) Многолистные области над комплексно-числовым пространством C^n. Условия, при выполнении которых подобная область оказывается областью голоморфности ана-

литической функции: голоморфная выпуклость области, аналитическая выпуклость границы области. Необходимость условия голоморфной выпуклости.

2) Комплексно-аналитические многообразия. Выделение класса голоморфно-полных комплексно-аналитических многообразий; их аксиоматика. Теория функций на голоморфно-полных многообразиях: первая и вторая проблемы Кузена, проблема Пуанкаре; проблема Картана—Ока о связках когерентных идеалов.

Комплексно-аналитические пространства Хаусдорфа; их аксиоматика.

3) Отображения многолистных областей. Исключительные отображения. Аналитические автоморфизмы гипершара.

А. Л. Шагинян (*Ереван*) **и С. Н. Мергелян** (*Москва*). **Исследования по теории приближений функций комплексного переменного.** В докладе предполагается дать обзор главных результатов по следующим разделам теории приближений в комплексной области.

1. Равномерные и наилучшие приближения многочленами и рациональными функциями на произвольных замкнутых множествах.

2. Приближения многочленами на неограниченных множествах и в некаратеодориевых областях—равномерные, с весом, в среднем.

3. Приближения в среднем при наличии весовой функции.

4. Приближения целыми функциями—равномерные, наилучшие, с касанием на бесконечности.

5. Приближения специальными классами аналитических функций.

СЕКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Ю. М. Березанский (*Киев*). **Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях и частных производных.** В первой части доклада строится разложение по собственным функциям разностного аналога самосопряженного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, именно уравнения в частных разностях вида

$$L[u]_{j,k} = a_{j-1,k} u_{j-1,k} + a_{j,k} u_{j+1,k} + b_{j,k-1} u_{j,k-1} + b_{j,k} u_{j,k+1} + c_{j,k} u_{j,k} = \lambda u_{j,k}. \quad (1)$$

Для определенности задача рассматривается на целочисленных точках правой полуплоскости. Для разложений по собственным функциям этой задачи устанавливаются результаты, аналогичные теории классической степенной проблемы моментов и развитой М. Г. Крейном матричной проблемы моментов. Именно: 1) выясняется характер разложения, 2) исследуется, в каких случаях задача будет определенной или неопределенной, 3) в случае «максимальной» неопределенности дается описание всех спектральных матриц. Отметим, что при этих построениях не играет роли «эллиптичность» или «гиперболичность» уравнения (1).

Во второй части строится разложение по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов. Как и в случае разностных уравнений, эллиптичность или гиперболичность не играет роли, однако в неэллиптическом случае появляются обобщенные собственные функции, не приводящиеся к обычным. Построение разложений ведется по следующему плану.

Основной факт спектральной теории эллиптических самосопряженных дифференциальных операторов состоит в том, что разложение единицы E_λ каждого самосопряженного расширения такого оператора является интегральным оператором, причем его ядро можно продифференцировать по λ относительно некоторой неубывающей функции $\rho(\lambda)$. Иными словами, для функций $f(x)$ и $g(x)$ и конечного или бесконечного интервала Δ справедливо равенство Парсеваля

$$(E_\Delta f, g) = \int_\Delta d_\lambda \left\{ \int\int v(x, y; \lambda) f(y) \overline{g(x)}\, dx\, dy \right\} =$$

$$= \int_\Delta \left\{ \int\int \psi(x, y; \lambda) f(y) \overline{g(x)}\, dx\, dy \right\} d\rho(\lambda). \quad (2)$$

Ядро $\psi(x, y; \lambda)$ «собрано» из собственных функций с одним и тем же собственным числом λ. Первые факты в этом направлении принадлежат Карлеману. Приведенные выше результаты для уравнения Шредингера $-\Delta u + c(x)u = \lambda u$ установлены А. Я. Повзнером, а в общем случае—Гордингом и Браудером; сюда относятся также результаты Маутнера и других авторов.

В докладе показывается, что равенства, аналогичные (2), справедливы и для общего самосопряженного дифференциального оператора, только ядра в этом случае будут в некотором смысле обобщенными функциями. Более того, они справедливы для общих самосопряженных операторов, действующих в L_2. Применительно к эллиптическим уравнениям эти факты приводят к простым и, как нам кажется, естественным доказательствам упомянутых выше результатов (во всяком случае для достаточно гладких коэффициентов), а также к результатам спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вторая часть доклада примыкает к важным результатам И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко, впервые применившим теорию обобщенных функций к построению «диагональных» разложений по собственным функциям общих самосопряженных операторов. Показывается, что из полученных в докладе разложений можно получить и, как нам кажется, существенно уточнить большинство этих результатов. Наши методы отличны от методов И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко.

И. М. Гельфанд (*Москва*), **М. И. Граев** (*Москва*), **М. А. Наймарк** (*Москва*) **и Ф. А. Березин** (*Москва*). **Представление групп Ли.**

И. Ц. Гохберг (*Бельцы*) **и М. Г. Крейн** (*Одесса*). **О некоторых основных положениях теории систем интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов.** Исследуется система интегральных уравнений, сокращенно записываемая в виде

$$g(t)-\int_0^\infty K(t-s)\,g(s)\,ds=f(t) \qquad (0\leqslant t<\infty), \tag{1}$$

где $K(t)=\|K_{jl}(t)\|_1^n$ $(-\infty<t<\infty)$ — квадратная матрица-функция с элементами из $L_1(-\infty,\infty)$, а $g=\{g_j(t)\}_1^n$ и $f(t)=\{f_1(t)\}_1^n$ $(0\leqslant t<\infty)$ — n-мерные вектор-функции, представляемые как матрицы с одним столбцом.

Через $L_{p;\,n}$ $(1\leqslant p<\infty$, n — натуральное число) обозначается пространство n-мерных вектор-функций $f(t)=\{f_j(t)\}_1^n$, компоненты которых принадлежат пространству $L_p(0,\infty)$, причем норма $\|f\|$ определяется равенством

$$\|f\|^p=\|f_1\|^p+\|f_2\|^p+\ldots+\|f_n\|^p.$$

В предположении, что

$$\Delta(\lambda)=\det(I_n-\mathfrak{K}(\lambda))\neq 0 \qquad \left(\mathfrak{K}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}K(t)\,dt, \qquad -\infty<\lambda<\infty\right),$$

устанавливаются следующие предложения.

1. Размерности α и β линеалов всех решений в классе $L_{1;\,n}$ однородных уравнений

$$\varphi(t)-\int_0^\infty K(t-s)\,\varphi(s)\,ds=0, \tag{2}$$

$$\psi'(t)-\int_0^\infty \psi'(s)\,K(s-t)\,ds=0 \tag{3}$$

конечны, при этом

$$\beta-\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\arg\Delta(\lambda).$$

(Через ψ' мы обозначаем тот же вектор, что и ψ, но изображаемый матрицей, состоящей из одной строчки.)

Все решения из $L_{1;\,n}$ уравнений (2) и (3) ограничены (а значит, и непрерывны), причем других ограниченных решений уравнения (2) и (3) не имеют.

2. Неоднородное уравнение (1) с правой частью $f \in L_{1;\,n}$ будет иметь решение в $L_{1;\,n}$ в том и только том случае, когда

$$\int_0^\infty \psi'(s)\,f(s)\,ds = 0 \qquad \left(\psi'(s)\,f(s) = \sum_1^n \psi_j(s)\,f_j(s)\right),$$

где ψ — любое решение из $L_{1;\,n}$ уравнения (3).

3. Если $\alpha = \beta = 0$, то единственное решение $g \in L_{1;\,n}$ уравнения (1) при $f \in L_{1;\,n}$ будет получаться по формуле

$$g(t) = f(t) + \int_0^\infty \Gamma(t,\,s)\,f(s)\,ds,$$

где ядро $\Gamma(t,\,s)$ получается из решений $\Gamma_1(t)$ и $\Gamma_2(t)$ матричных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_1(t) - \int_0^\infty K(t-s)\,\Gamma_1(s)\,ds = K(t) \\ &\Gamma_2(t) - \int_0^\infty \Gamma_2(s)\,K(s-t)\,ds = K(t) \end{aligned}\right\} \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

по формуле

$$\Gamma(t,\,s) = \Gamma_1(t-s) + \Gamma_2(s-t) + \int_0^\infty \Gamma_1(t-r)\,\Gamma_2(s-r)\,dr;$$

при этом полагаем $\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t) = 0$ при $t < 0$.

Матрицы-функции $\Gamma_1(t)$ и $\Gamma_2(t)$ с элементами из $L_1(0,\,\infty)$ обладают тем характеристическим свойством, что

$$\begin{aligned} &[I_n - \mathfrak{K}(\lambda)]^{-1} = (I_n + \mathfrak{G}_1(\lambda))\,(I_n + \mathfrak{G}_2(-\lambda)) \quad &&\text{при} \quad -\infty < \lambda < \infty, \\ &\det(I_n + \mathfrak{G}_j(\lambda)) \neq 0 \quad (j = 1,\,2) &&\text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \end{aligned}$$

где

$$\mathfrak{G}_j(\lambda) = \int_0^\infty \Gamma_j(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \qquad (j = 1,\,2).$$

4. Если $K(t)$ — эрмитова матрица-функция $K(-t) = K^*(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, то $\alpha = \beta = 0$ и, следовательно, применимы все утверждения из п. 3, при этом $\Gamma_2(t) = \Gamma_1^*(t)$.

Указанные результаты получены в основном с помощью теории возмущений ограниченных операторов вполне непрерывными, а также с помощью теории нормированных колец. Эти результаты обобщаются на случай перехода от пространств $L_{1;\,n}$ к общим пространствам $L_{p;\,n}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и некоторым другим.

Исследуется также случай, когда $\Delta(\lambda)$ обращается в нуль на вещественной оси.

Проводится сопоставление полученных результатов и метода исследования с ранее известными.

И. С. Иохвидов *(Одесса)*. **Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой.** 1. Гильбертово пространство l_2 превращается в пространство $\Pi_\varkappa$ с индефинитной метрикой, если ввести в нем вместо обычного (положительно определенного) новое (индефинитное) скалярное произведение

$$(x,\,y) = -\xi_1\bar{\eta}_1 - \ldots - \xi_\varkappa\bar{\eta}_\varkappa + \xi_{\varkappa+1}\bar{\eta}_{\varkappa+1} + \ldots; \quad x = \{\xi_j\},\ y = \{\eta_j\}; \quad x,\,y \in l_2. \quad (1)$$

Норма вектора $x \in H_\varkappa$ и все связанные с ней топологические понятия определяются, как и в обычном гильбертовом пространстве (см. [1]).

Пространство $H_\varkappa$ допускает и другое — аксиоматическое — определение (см. [2]), которое полезно и даже необходимо для приложения теории к конкретным функциональным пространствам.

В докладе приводится обзор результатов Л. С. Понтрягина, М. Г. Крейна и докладчика по теории линейных операторов в пространстве $H_\varkappa$. При этом существенно используется совместная монография М. Г. Крейна и докладчика, первая часть которой недавно опубликована (см. [2]).

2. При изучении различных классов линейных операторов в $H_\varkappa$ у некоторых из них обнаруживается специфическое свойство: существование $\varkappa$-мерного инвариантного подпространства J, на котором $(x, x) \leqslant 0$ $(x \in J)$. Достаточным для существования такого подпространства является любое из следующих условий.

а) *Самосопряженность* оператора по отношению к индефинитному скалярному произведению (1) (см. [1]).

б) *Унитарность* оператора по отношению к (1) (см. [3], [4]).

в) Свойство ограниченного оператора *не увеличивать форму* (x, x), если $(x, x) \leqslant 0$ (см. [5]).

Доказательства этих основных теорем могут быть получены различными методами. Так, условие а) впервые было обнаружено весьма сложными алгебраическими и аналитическими рассуждениями [1]. Условие б) сначала для случая вещественной формы (1) и $\varkappa = 1$ получено топологическими методами теории конусов [3], обобщение которых привело впоследствии к более общему условию в) уже при произвольном натуральном $\varkappa$ и комплексной форме (1). Метод дробно-линейного преобразования Кэли—Неймана позволяет из условия а) получить условие б), и обратно [4], [2].

3. Следствия из основных теорем позволяют дать естественную *классификацию конечномерных инвариантных подпространств унитарных и самосопряженных операторов*, а также получить для них *аналог спектрального разложения*. Последнее оказывается особенно простым у *положительного* оператора.

Установлено, что *отсутствие нуля в дискретном спектре вполне непрерывного самосопряженного оператора является достаточным условием полноты системы его конечномерных инвариантных подпространств* [6].

4. Для *эрмитовых* и *изометрических* по отношению к (1) операторов установлены оценки количества и порядков непростых элементарных делителей [1], [2], а также изучен вопрос о расширении этих операторов [2].

5. Формулируется ряд не решенных еще проблем общей теории. Таковы, например, отыскание общего вида резольвенты самосопряженных расширений эрмитовых операторов с выходом в более широкое пространство, обобщенная теорема Стоуна и др.

6. Указываются некоторые приложения теории: к изучению винтовых линий в пространстве Лобачевского [7], к нагруженным интегральным уравнениям [6], к неопределенным теплицевым формам [8].

Лит.: 1. Понтрягин Л. С., Изв. АН СССР, сер. матем., 8, (1944), 243—280. 2. Иохвидов И. С. и Крейн М. Г., Труды Моск. матем. об-ва, V, (1956). 3. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Усп. матем. наук, 3, вып. (23), (1948), § 5. 4. Иохвидов И. С., Зап. Н.-иссл. ин-та матем. и мех. ХГУ и Харьк. матем. об-ва, XXI, (1949), 79—86. 5. Крейн М. Г., Усп. матем. наук, V, вып. 2, (36), (1950). 6. Иохвидов И. С., ДАН СССР, **71**, № 2, (1950), 225—228. 7. Крейн М. Г., Усп. матем. наук, III, вып. 3, (1948), 152. 8. Иохвидов И. С., ДАН СССР, **101**, № 2, (1955), 213—216.

М. А. Красносельский (*Воронеж*) и **Л. А. Люстерник** (*Москва*). **О некоторых топологических проблемах нелинейного функционального анализа.** В последние десятилетия получили широкое развитие топологические методы в различных нелинейных задачах — в теории интегральных и дифференциальных уравнений и вариационном исчислении. Эти методы позволяют произвести качественный анализ рассматриваемой задачи — выявить существование решений, их число и свойства, исследовать характер зависимости от разнообразных параметров. Во многих случаях такой качественный анализ позволяет разумным образом применять аналитический аппарат и организовывать вычислительный процесс. При этом возникает ряд задач топологии, многие из которых пока не нашли удовлетворительного решения. С другой стороны, возникает и ряд специфических задач функционального анализа.

В докладе предполагается разобрать основные функционально-топологические методы, применявшиеся до сих пор в анализе: методы неподвижной точки, теории пересечений, степени отображения, вращения векторного поля, вопросы, связанные с принципом Пуанкаре, методы оценки числа и характера решений вариационных задач. Предполагается показать, как топологические методы применяются к конкретным задачам анализа, механики геометрии.

М. Г. Крейн (*Одесса*). **Эволюция проблемы моментов и задача о колебаниях струны.**

М. С. Лившиц (*Одесса*). **Теория несамосопряженных операторов и ее применения.** Известно, что теория несамосопряженных операторов в течение длительного периода времени оставалась сравнительно мало разработанной. В последние годы, благодаря исследованиям советских математиков (М. В. Келдыш, М. А. Наймарк, И. М. Гельфанд, М. С. Бродский, М. С. Лившиц, В. А. Потапов, Б. Р. Мукминов, Л. А. Сахнович и др.), в этом направлении был накоплен обширный материал и возникла спектральная теория несамосопряженных операторов, нашедшая применения в вопросах движения диссипативных систем и в общей теории ядерных реакций.

В докладе освещаются работы, выполненные группой одесских математиков в период с 1950 по 1955 г., связь этих работ с исследованиями М. В. Келдыша, М. А. Наймарка, И. М. Гельфанда, а также применения к теории ядерных реакций.

1. Характеристические матрицы-функции операторов с вполне непрерывной мнимой частью, обобщенные характеристические матрицы-функции, сцепления операторов, теорема умножения, инвариантные подпространства оператора и делители его характеристической матрицы-функции.

2. Треугольные модели несамосопряженных операторов. Сопутствующие системы конечно-разностных и дифференциальных уравнений.

3. Критерии полноты и разложения по собственным функциям операторов с неотрицательной мнимой частью. Доказательство (методом характеристических матриц-функций) теоремы М. В. Келдыша о полноте системы собственных и присоединенных функций оператора вида $H+HB$.

4. Приведение некоторых классов несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду. Связь с работами М. А. Наймарка. Критерии устойчивости для уравнений вида $\frac{d\psi}{dt}=A\psi$, где A—оператор, спектр которого лежит на мнимой оси. Теоремы единственности обратных задач для некоторых систем дифференциальных уравнений.

5. Инвариантные подпространства оператора

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Решение одной задачи И. М. Гельфанда и ее обобщения. Клетки Жордана в бесконечномерном пространстве.

6. Несамосопряженный оператор энергии составного ядра (для нерелятивистских и релятивистских частиц). Понятие о числе каналов ядерной реакции и доказательство совпадения этого числа с рангом несамосопряженности соответствующего оператора энергии. Матрица рассеяния составного ядра и ее связь с характеристической матрицей-функцией оператора энергии. Формула Брейта—Витнера для многих уровней. Выражения для эффективных сечений с помощью резольвенты оператора энергии. Влияние потенциального поля на матрицу рассеяния составного ядра. Построение

оператора энергии по заданной матрице рассеяния. Исследование распада составного ядра в зависимости от характера его спектра.

В. А. Рохлин (*Иваново*), **С. В. Фомин** (*Москва*). **Спектральная теория динамических систем.** Уже давно было замечено, что многие проблемы теории обыкновенных дифференциальных уравнений носят чисто метрический характер, т. е. решаются в зависимости от чисто метрических свойств соответствующей группы преобразований фазового пространства. Когда были доказаны основные эргодические теоремы и в теорию динамических систем проникли спектральные понятия и методы, эта точка зрения получила новое подкрепление. Результатом явилось создание чисто метрической теории динамических систем, которая, оставляя в стороне все аналитические и топологические свойства, определила динамическую систему просто как группу автоморфизмов пространства с мерой. Изучение таких групп есть задача, связанная уже не только с проблемами качественной теории дифференциальных уравнений, но и с разнообразными проблемами теории меры, функционального анализа и теории вероятностей. Что касается теории меры, то для нее изучение автоморфизмов пространства с мерой имеет фундаментальное значение—такое же, какое имеет, например, для проективной геометрии изучение проективных преобразований.

Настоящий доклад посвящен спектральным проблемам теории динамических систем. Пусть M—пространство с мерой, изоморфное отрезку $[0,1]$ с обычной мерой Лебега (можно показать, что таковы все пространства с нормированной мерой, представляющие интерес для теории динамических систем), и G—однопараметрическая или циклическая группа его автоморфизмов. В унитарном пространстве $L_2(M)$ группе G отвечает купмановская группа G' унитарных операторов. С точностью до унитарной эквивалентности группа G' определяется своими спектральными инвариантами, и эти последние являются метрическими инвариантами динамической системы (M, G). Основные проблемы спектральной теории динамических систем могут быть формулированы следующим образом.

1. В какой мере спектральные инварианты определяют метрический тип эргодической динамической системы?

2. Какими могут быть эти спектральные инварианты?

В первую очередь были изучены эргодические системы с чисто точечным спектром (Купман, Нейман). Для них обе проблемы получили классически простое и исчерпывающее решение; в частности, доказано, что метрический тип эргодической системы с чисто точечным спектром полностью определяется этим спектром. Напротив, в случае смешанного спектра существуют метрически неизоморфные эргодические системы с тождественными спектральными свойствами (Халмош—Нейман).

Основным является случай чисто непрерывного спектра, представляющий, несомненно, очень большие трудности. Для этого случая первая из двух названных проблем остается полностью открытой; существуют ли спектрально изоморфные, но метрически неизоморфные системы—неизвестно. Например, имеются очень простые конкретные системы со счетно-кратным лебеговским спектром, о которых можно думать, что они метрически неизоморфны; однако это не удается ни доказать, ни опровергнуть.

О структуре непрерывного спектра (вторая проблема) известно несколько больше. Исследования велись в двух направлениях. Во-первых, рассматривались различные пространства, состоящие из динамических систем, и изучались категории тех или иных классов динамических систем в этих пространствах. Было доказано, что класс систем с чисто непрерывным спектром имеет вторую категорию (Халмош), а класс систем с сильным перемешиванием—первую категорию (Рохлин). Таким образом, основную массу составляют системы со слабым перемешиванием, но без сильного; результат этот интересен, в частности, тем , что самое существование таких систем было проблемой. Далее доказано, что, каков бы ни был спектральный тип ρ, множество динамических систем со спектральными типами, подчиненными ρ, имеет первую категорию (Рохлин). Из этой теоремы следует существование динамических систем с весьма разнообразными спектральными свойствами.

Наряду с развитием общей спектральной теории динамических систем в ряде работ исследовались различные более или менее широкие конкретные классы динамических систем, в частности, систем с непрерывным спектром. Первыми примерами эргодических динамических систем с непрерывным спектром были системы, имеющие счетно-кратный лебеговский спектр. Широкий класс таких систем может быть получен (Халмош, Рохлин) следующим образом: пусть K — некоторая компактная абелева группа и τ — какой-либо ее автоморфизм. K с заданным автоморфизмом τ можно рассматривать как динамическую систему (с дискретным временем), причем мера Хаара на K инвариантна относительно τ. Если эта система эргодична, то ее спектр обязательно счетно-кратный лебеговский. Есть основания полагать, что, выбирая различным образом K и τ, можно получить неизоморфные между собой системы (с одинаковым спектром), но эта проблема еще не решена.

Другой важный класс динамических систем можно получить с помощью теоретико-вероятностных методов. Рассмотрим пространство Ω числовых последовательностей $\{\omega_n\}$ с некоторой мерой μ в нем, инвариантной относительно преобразования сдвига, определяемого формулой

$$S\{\omega_n\}=\{\omega_{n+1}\}.$$

Пространство Ω с мерой μ и движением S представляет собой динамическую систему, спектр которой зависит от меры μ. Таким путем можно получать различные спектральные типы динамических систем, в частности, систем с непрерывным, но не лебеговским спектром (Фомин). Имеет место следующая теорема: какова бы ни была непрерывная монотонная функция $F(\lambda)$, удовлетворяющая условию $F(-\lambda)=-F(-\lambda)$, и такая, что ее свертки с ней самой ей эквивалентны, существует эргодическая динамическая система, имеющая $F(\lambda)$ своим максимальным спектральным типом. Оценка кратности спектра представляет трудность. Первоначально предполагалось, что таким путем можно построить систему с непрерывным простым спектром, однако это не удалось. Вопрос о существовании систем с непрерывным простым спектром остается открытым; весьма возможно, что ответ на него должен быть отрицательным.

Весьма интересный класс динамических систем, тесно связанный с задачами механики, представляют собой так называемые геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны. Э. Хопф и Хедлунд установили, при определенных дополнительных условиях, наличие перемешивания в таких системах (а следовательно, и их эргодичность). Для случая геодезических потоков на двух- и трехмерных многообразиях постоянной кривизны удалось показать, что спектр будет лебеговским (Гельфанд—Фомин). При этом существенно были использованы методы теории представлений групп. При оценке кратности спектра обнаруживаются интересные связи с теорией автоморфных функций.

Классической моделью для рассмотрения многих вопросов теории динамических систем является тор. Рассмотрим динамическую систему, определяемую на торе уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=\Phi_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=\Phi_2(x, y),$$

где Φ_1 и Φ_2 — аналитические функции x и y, причем каждая траектория всюду плотна. Эта система может быть приведена аналитическими преобразованиями к виду

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{F(x, y)}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{\gamma}{F(x, y)},$$

где γ — иррациональное число и $F(x, y)>0$. В зависимости от γ и $F(x, y)$ можно получить как точечный, так и непрерывный спектр (Колмогоров). В последнее время ряд результатов, полученных А. Н. Колмогоровым для двумерного тора, был перенесен на случай n измерений (М. И. Грабарь).

А. Г. Сигалов (*Горький*). **Прямые методы вариационного исчисления.** 1. З а д а ч а П л а т о и е е о б о б щ е н и я. Решение задачи Плато Д. Дугласом и Т. Радо (1931 г.).

Обобщение задачи Плато Е. Мак-Шейном. Регулярные двойные интегралы в параметрической форме. Обобщенные поверхности Л. Юнга. Задачи с допустимыми поверхностями высших топологических типов. Компактность семейства решений и корректность постановки вариационной задачи.

2. Обобщения задачи о минимуме интеграла Дирихле. Теоремы Л. Тонелли (1931). Обобщенные решения квазирегулярных задач, полученные с помощью теорем вложения С. Л. Соболева. Результаты Ч. Моррея. Существование непрерывных решений квазирегулярных задач и связь задачи в непараметрической форме с задачей в параметрической форме. Применение симметризации к решению частных задач (Полиа и Сеге). Вариационные задачи квантовой механики.

3. Дифференциальные свойства решений. Условия дифференцируемости и аналитичности, полученные с помощью уравнения Хаара (В. Хопф, Ч. Моррей). Сведение проблемы дифференцируемости к изучению семейства квадратичных интегралов (М. Шифман, А. Г. Сигалов). Типические свойства решений квазилинейных уравнений эллиптического типа, полученные прямыми методами: обобщение принципа максимума, неединственность решения, компактность семейства решений, единственность в малом.

С. Л. Соболев (*Москва*), **Л. А. Люстерник** (*Москва*), **Л. В. Канторович** (*Ленинград*). **Функциональный анализ и вычислительная математика.** 1. Исторический очерк. Вычислительная математика как один из источников возникновения идей функционального анализа.

2. Вычислительная математика как наука о конечных приближениях общих компактов (не обязательно метрических).

3. Основные разделы вычислительной математики в их исторической последовательности. Приближение чисел, функций, операторов.

4. Приближения в пространствах с разной топологией. Приближения в C_n, в $C_{\rho(\infty)}$ (интегральные преобразования на оси в L_2). Слабые приближения. Интеграл как предел суммы, сходимость квадратурных формул. Полуупорядоченные пространства.

5. Формы приближения операторов. Равномерные приближения. Сильное приближение. Правильное приближение. Приближение n-мерными многообразиями. Сохранение качественных свойств оператора при замене его приближениями. (Обратимость оператора, свойство максимума, интегральные оценки.)

6. Приближение функций от операторов. Символическое исчисление для функций одного и нескольких переменных. Применение этих методов к квадратурным и кубатурным формулам. Аппроксимация резольвенты операторными многочленами. (Многочлены Чебышева, непрерывные дроби, ортогонализация последовательности A_x^n).

7. Сеточные приближения. Вопрос о решениях сеточных уравнений. Устойчивость разностного счета.

8. Вычислительные алгорифмы и их непосредственное изучение. Общие свойства вычислительных алгорифмов. Замыкание вычислительных алгорифмов.

9. Перенесение вычислительных идей алгебры и элементарного анализа на функциональные пространства. Метод последовательных приближений. Линеаризация. Метод Ньютона и его различные варианты. Чаплыгинские оценки. Обобщение принципа отделения корней. Теорема Шаудера о вращении векторного поля. Принцип наискорейшего спуска.

10. Новые задачи вычислительного характера, возникшие внутри функционального анализа. Уравнения в вариационных производных. Интегрирование в функциональном пространстве.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. Б. Дынкин (*Москва*). **Марковские процессы с непрерывным временем.** 1. Основы общей теории марковских случайных процессов были заложены в работе А. Н. Колмогорова «Об аналитических методах теории вероятностей». Марковские процессы классифицировались в зависимости от множества возможных состояний, для каждого класса процессов строились свои инфинитезимальные характеристики: для процессов с дискретным множеством состояний—матрицы плотностей вероятностей перехода, для диффузионных процессов на прямой—коэффициенты диффузии и переноса и т. д. Рассматривалась также задача о восстановлении процесса по его инфинитезимальным характеристикам. Для этой цели использовался аппарат дифференциальных уравнений. Исследования по теории марковских процессов в последующие годы в значительной мере направлялись программой, намеченной в «Аналитических методах теории вероятностей».

Возможности нового подхода к построению инфинитезимальных характеристик марковских случайных процессов были созданы развитием теории однопараметрических полугрупп линейных операторов, достигшей известного завершения в книге Э. Хилла «Функциональный анализ и полугруппы» (1948) и работах К. Иосида (1948—1949). (Значение полугруппового подхода к марковским процессам отмечалось А. Н. Колмогоровым еще до создания этой теории (1934) на 2-м Всесоюзном съезде математиков.) Сила полугрупповых методов была убедительно показана В. Феллером в цикле работ по теории диффузии, опубликованных в 1952—1955 гг.

Другим важным новым орудием исследования марковских процессов является теория стохастических интегральных уравнений К. Ито. Принципиальная новизна метода Ито состоит в том, что, в отличие от дифференциальных уравнений Колмогорова и полугрупповых методов Хилла—Иосида, этот метод позволяет строить по инфинитезимальным характеристикам не переходные вероятности, а непосредственно траектории процесса. Изучение диффузионных процессов, основанное на использовании стохастических интегральных уравнений, было предпринято недавно Дубом.

До самого последнего времени исследование марковских процессов с позиций теории полугрупп велось без существенного обращения к вероятностным свойствам траекторий. В 1955—1956 гг. Е. Б. Дынкин показал, что, соединяя полугрупповые методы с анализом вероятностного поведения траекторий, можно получить существенно более общие результаты, чем в предшествующих работах чисто аналитического направления.

За последние годы в связи с развитием прямых вероятностных методов появилась возможность обратного приложения вероятностных рассмотрений к исследованию дифференциальных и более общих функциональных уравнений.

2. Пусть $P(t, x, \Gamma)$—вероятности перехода однородного по времени марковского процесса в фазовом пространстве ε, B—банахово пространство всех ограниченных измеримых функций $f(x)$ $(x \in \varepsilon)$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in \varepsilon} |f(x)|$. Формула

$$T_t f(x) = \int\limits_{\varepsilon} P(t, x, dy) f(y)$$

определяет в пространстве B однопараметрическую полугруппу ограниченных линейных операторов T_t. Инфинитезимальный оператор A определяется формулой

$$Af = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f - f}{t} \quad \text{(сильный предел)} \tag{I}$$

на всех функциях $f \in B$, для которых предел в правой части существует. Из теории Хилла—Иосида вытекает, что оператор A однозначно определяет полугруппу T_t в подпространстве B_0, составленном из всех функций f, для которых $\| T_t f - f \| \to 0$ при $t \to 0$. Можно показать, что в действительности A определяет T_t во всем пространстве B и, следовательно, полностью определяет марковский процесс (предполагается, что ε — метрическое пространство и что $P(t, x, u) \to 1$ при $t \to 0$ для всякой окрестности u точки x). Таким образом, задача классификации однородных по времени марковских процессов сводится к задаче определения возможного вида их инфинитезимальных операторов.

3. Обычное определение марковского процесса требует, чтобы для каждого положительного числа τ течение процесса после момента τ при известном значении $x(\tau)$ не зависело от течения процесса до момента τ. Если это требование выполняется не только для постоянного, но и для любого случайного, но не зависящего от будущего момента τ, то мы называем процесс строго марковским. Независимость от будущего означает, что при любом t событие $\{\tau \leqslant t\}$ принадлежит γ-алгебре, порожденной событиями $\{x(s) \in \Gamma\}$, где $s \leqslant t$, Γ — измеримое подмножество ε. Даже среди процессов с непрерывными траекториями существуют марковские процессы, не являющиеся строго марковскими (А. А. Юшкевич). С другой стороны, Е. Б. Дынкиным и А. А. Юшкевичем доказано, что непрерывный справа марковский процесс является строго марковским, если соответствующая ему полугруппа T_t переводит в себя пространство C всех непрерывных ограниченных функций. Последнее условие было подробно проанализировано Феллером, и мы будем называть процессы, для которых оно выполняется, феллеровскими. В случае феллеровских процессов целесообразно рассматривать полугруппу T_t и инфинитезимальный оператор A только в пространстве C.

4. Используя то обстоятельство, что феллеровские процессы являются строго марковскими, Е. Б. Дынкин построил для каждого такого процесса некоторый оператор $\mathfrak{A}$, который всегда является расширением инфинитезимального оператора A, а в случае, когда фазовое пространство ε компактно, совпадает с A. Для процессов со счетным множеством состояний оператор $\mathfrak{A}$ задается матрицей плотностей вероятностей перехода, для диффузионных процессов — это эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, для произвольных (многомерных) процессов с непрерывными траекториями этот оператор является естественным обобщением эллиптических дифференциальных операторов второго порядка.

Оператор $\mathfrak{A}$ строится следующим образом. Обозначим через γ_F нижнюю грань тех моментов времени, когда траектория процесса находится вне замкнутого множества F, и сопоставим каждому открытому множеству u случайную величину $\tau_u = \sup\limits_{F \subseteq u} \gamma_F$. Тогда

$$\mathfrak{A} f(x) = \lim_{d(u) \to 0} \frac{M_x f[x(\tau_u)] - f(x)}{M_x \tau_u}, \tag{1}$$

где M_x обозначает математическое ожидание при условии $x(0) = x$ и $d(u)$ — диаметр окрестности u.

5. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (a \geqslant 0) \tag{2}$$

на отрезке $[\alpha, \beta]$ и будем искать дополнительные условия, при которых для всякой функции $\varphi \in C$ существует единственное решение $u(t, x)$ такое, что $u(t, x) \to \varphi(x)$ при $t \to 0$. Уравнение (2) задает непрерывный марковский процесс внутри интервала (α, β). Различные дополнительные условия соответствуют различным вариантам поведения траектории после достижения ею граничных точек. При этом условия локального характера отвечают случаю, когда траектория остается непрерывной на границе, а условия интегрального характера — случаю, когда траектория испытывает на границе разрыв. Поставленная нами задача сводится к следующей: какой вид может иметь оператор $\mathfrak{A}$ в граничных точках α и β, если во всякой внутренней точке он равен $a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}$? Из формулы (1) легко получить решение этой задачи, если ограничиться непрерывными процессами. Общий случай был исследован В. Феллером чисто аналитическими методами. Как показал недавно А. Вентцель, решение Феллера не учитывает того, что траектория может иметь бесконечно много разрывов в любой окрестности момента времени, когда она достигает граничной точки. Этот существенный пробел был восполнен А. Вентцелем.

Актуальной задачей является исследование всех возможных дополнительных условий для многомерного аналога уравнения (2). В этом направлении до настоящего времени не получено никаких результатов.

6. Пусть $\mathfrak{A}$ — оператор, соответствующий непрерывному феллеровскому процессу $x(t)$ в n-мерной области G (как уже указывалось, $\mathfrak{A}$ является обобщенным эллиптическим дифференциальным оператором).

Формула

$$f(x) = M_x\varphi[x(\tau_G)] \tag{3}$$

сопоставляет каждой непрерывной ограниченной функции φ, заданной на границе области G, функцию f, удовлетворяющую внутри G уравнению $\mathfrak{A}f(x) = 0$.

Можно показать, что при $t \to \tau_G$ $f[x(t)] \to \varphi[x(\tau_G)]$ с вероятностью 1, т. е. граничные значения φ принимаются функцией $f(x)$ при приближении x к границе по почти всякой траектории процесса. Функцию $f(x)$ можно рассматривать как решение задачи Дирихле для уравнения $\mathfrak{A}f = 0$; формула (3) представляет собой обобщение интеграла Пуассона.

Пусть $\Gamma \subseteq G$. Обозначим через ξ_Γ меру множества моментов времени t, для которых $x(t) \in \Gamma$, и положим $K(x, \Gamma) = M_x\xi_\Gamma$. Тогда для любой непрерывной ограниченной функции $g(x)$ $(x \in G)$ функция $f(x) = \int\limits_G K(x, dy)\, g(y)$ удовлетворяет уравнению $\mathfrak{A}f(x) = g(x)$. Следовательно, $K(x, \Gamma)$ есть функция Грина для оператора $\mathfrak{A}$.

7. Пусть $x(t)$ — непрерывный феллеровский процесс и пусть $V(x)$ — функция из пространства C. Положим

$$S_t f(x) = M_x \left\{ f[x(t)]\, e^{\int\limits_0^t V[x(u)]\,du} \right\}. \tag{4}$$

Операторы S_t образуют однопараметрическую полугруппу ограниченных операторов в пространстве C, и инфинитезимальный оператор этой полугруппы равен $A + V$, где A — инфинитезимальный оператор процесса $x(t)$, а V — оператор умножения на функцию $V(x)$.

Эта теорема, обобщающая ряд результатов М. Каца, А. Блан-Лапьера и Р. Форте, была получена Е. Б. Дынкиным в 1955 г. Опираясь на формулу (4), можно, например, сводить изучение спектральных свойств оператора $A + V$ к изучению аналогичных свойств оператора A. В случае, когда A есть оператор Лапласа, такое сведение было использовано в работах М. Каца и Д. Рэя.

8. В настоящее время полностью решена задача классификации одномерных строго марковских процессов с непрерывными траекториями (В. Феллер, Е. Б. Дынкин). Становится весьма актуальной задача классификации всех одномерных строго марков-

ских процессов, имеющих лишь разрывы первого рода. В качестве первого шага следовало бы рассмотреть монотонные процессы.

9. В работах Ито стохастические дифференциальные уравнения решаются методом последовательных приближений. Проведение этого метода требует введения ограничений, не связанных с существом дела. Для исследования вопроса о существовании решения стохастического дифференциального уравнения в возможно более широких предположениях, вероятно, может оказаться полезным аналог метода «ломаных Эйлера» — приближение решения процессами, составленными «по кускам» из процессов с независимыми приращениями.

А. Н. Колмогоров (*Москва*), **А. М. Яглом** (*Москва*) и **И. М. Гельфанд** (*Москва*). **Количество информации и энтропия для непрерывных распределений (конечных и бесконечномерных).**

В. С. Королюк (*Киев*). **Асимптотические разложения некоторых функционалов от сумм случайных величин.** Уточнение предельных теорем для функций распределения сумм независимых случайных величин, сходящихся к нормальному закону, начато еще П. Л. Чебышевым, а затем развито и строго обосновано в работах Крамера и Эссена.

Большинство дальнейших работ по асимптотическим разложениям для функций распределения сумм примыкает к кругу идей, развитых в указанных работах, и основано на использовании метода характеристических функций.

Изучение асимптотического поведения функций распределения в классических предельных теоремах еще далеко от завершения: не найдены окончательные оценки быстроты сходимости к нормальному закону при отсутствии старших моментов; необходим асимптотический анализ других предельных теорем.

Изучение асимптотического поведения функционалов от сумм случайных величин лишь только начато.

В теории асимптотических разложений наиболее эффективным методом является метод построения рекуррентной системы дифференциальных уравнений для членов разложения.

Трудности обоснования асимптотических разложений при применении этого метода связаны с тем, что решения получаемых дифференциальных уравнений не всегда являются достаточно гладкими функциями ; это имеет место, например, при построении асимптотических разложений для функций распределения в предельных теоремах теории вероятностей.

При обосновании асимптотических разложений для распределений максимальных уклонений сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин используются свойства функции Грина исходного уравнения.

При некоторых предположениях может быть получено, например, следующее разложение:

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq n}\sum_{r=1}^{k}\xi_r < z\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{a_3}{3\sqrt{2\pi n}}(2-z^2)e^{-\frac{z^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(M\xi_r=0, \quad M\xi_r^2=\frac{1}{n}, \quad M\xi_r^3=\frac{a_3}{n^{3/2}}, \quad r=1, 2, \ldots, n\right).$$

Дальнейшее развитие теории асимптотических разложений связано с изучением решений дифференциальных уравнений, а также с развитием новых алгоритмов для построения членов разложения.

Ю. В. Прохоров (*Москва*) и **А. В. Скороход** (*Москва*). **Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.**

Н. В. Смирнов (*Москва*), **Б. В. Гнеденко** (*Киев*) и **И. И. Гихман** (*Киев*). **Непараметрические задачи статистики.** 1. Классические постановки задач математической статистики неизменно предполагали, что входящие в рассмотрение случайные величины подчинены законам распределения, завясящим от конечного числа параметров. В основном задачи исследования сводились к оценке значений этих параметров и проверке различных гипотез в этих условиях. В ряде важных случаев такая постановка задач вполне естественна и сохраняет свое значение и в наше время.

2. В значительной степени классические методы были разработаны при специальном предположении—нормальности исходных распределений. Во многих случаях такой подход является недостаточным и не в состоянии охватить те задачи, с которыми сталкивается современная статистическая практика. Так, зачастую представляет существенный интерес не установление принадлежности распределения к тому или иному семейству, а установление того факта, что последовательность наблюдений можно рассматривать как независимую выборку с неизменным распределением. В результате возник цикл статистических проблем, в которых удается найти правила, не зависящие от исходных распределений в широком классе (например, для всех непрерывных или абсолютно непрерывных распределений). Такие задачи называются непараметрическими.

3. Непараметрические методы построения доверительной области для неизвестной функции распределения. Методы Колмогорова, Крамера—Мизеса—Смирнова и некоторые другие. Случай конечной и неограниченной выборок. Выход эмпирического распределения за границы полосы, некоторые результаты о больших уклонениях. Распределение функционалов от эмпирического распределения.

4. Непараметрические методы проверки однородности статистического материала. Методы Смирнова, Вольфовица, Вилкоксона и др. Случаи конечной и неограниченной выборок. Взаимное пересечение эмпирических распределений.

5. Некоторые другие непараметрические задачи—оценка случайности (метод серий, метод Кендалла и др.), оценка симметрии распределения, толерантные пределы и т. д.

6. Асимптотические разложения для некоторых непараметрических критериев.

7. Вопросы эффективности и мощности непараметрических методов оценки.

8. Полупараметрические методы. Сравнение эмпирических функций распределения с теоретическими, зависящими от параметров, оцениваемых по данным выборки.

9. Методы исследования: связь с процессами Маркова и «принципом инвариантности».

СЕКЦИЯ ТОПОЛОГИИ

П. С. Александров (*Москва*) **и К. А. Ситников** (*Москва*). **Комбинаторная топология незамкнутых множеств.** Постановка самой проблемы построения комбинаторной гомологической топологии незамкнутых множеств в эвклидовых пространствах и довольно обстоятельная программа этого построения были даны в 1935г. в докладе П. С. Александрова на Международной топологической конференции в Москве. Полученные в дальнейшем основные результаты в этой области (наиболее окончательные принадлежат К. А. Ситникову) идут в основном по пути осуществления и развития этой программы.

Докладу П. С. Александрова предшествовала работа К. Куратовского (1933), в которой теорема П. С. Александрова о сдвиге множества в нерв заданного покрытия этого множества (доказанная первоначально лишь для компактов) освобождается от предположения компактности и доказывается новым, оказавшимся в дальнейшем весьма плодотворным методом. Этот результат Куратовского не мог не навести на мысль о приложимости комбинаторных методов к исследованию не только компактов, но и произвольных незамкнутых множеств.

Дальнейшими результатами в области комбинаторной топологии незамкнутых множеств являются: теорема Эйленберга (1941) об инвариантности по отношению к топологическим преобразованиям произвольного множества $A \subset S^n$ числа компонент, на которые это множество A разбивает сферическое пространство S^n (рассмотрение сферического пространства n измерений, равносильное, конечно, рассмотрению n-мерного эвклидова пространства, технически удобнее); теорема Чогошвили, обобщающая закон двойственности Понтрягина на все ретракты, лежащие в S^n, в частности, на бесконечные полиэдры. Теорема Чогошвили является первой вообще теоремой двойственности, доказанной для незамкнутых множеств, а содержащаяся в ней теорема двойственности для бесконечных полиэдров впервые позволила ответить на ряд элементарных и естественно возникающих вопросов, установив, например, ацикличность дополнительного множества в S^n к любому топологическому образу открытого симплекса произвольного числа измерений. Первый общий закон двойственности, охватывающий случай любых множеств, лежащих в S^n, был доказан в 1947 г. П. С. Александровым. Работе П. С. Александрова предшествовали работы Чогошвили, в которых были подробно изучены и систематизированы различные типы гомологических групп для незамкнутых множеств и установлены различные соотношения между ними; для получения закона двойственности П. С. Александрова Чогошвили недоставало лишь основной теоремы инвариантности П. С. Александрова. Одновременно с П. С. Александровым эта теорема инвариантности была доказана и американским математиком С. Капланом, который, однако, не сумел воспользоваться ею и не только не доказал, но и не сформулировал никакой теоремы, позволяющей выразить гомологические группы множества $A \subset S^n$ через какие-либо топологические инварианты его дополнения $B = S^n \setminus A$. Заметим, что весьма далекое обобщение этой теоремы инвариантности было дано Ю. М. Смирновым. В своей работе, посвященной теории двойственности произвольных множеств в S^n, П. С. Александров широко воспользовался алгебраическим аппаратом, построенным Г. С. Чогошвили, а именно принадлежащей ему теорией прямых спектров бикомпактных групп.

Наряду с доказательством первого общего закона двойственности П. С. Александров рассмотрел ряд новых гомологических инвариантов незамкнутых множеств, например, группы незацепляемости, а также инварианты, возникающие из естественных гомоморфизмов, связывающих между собою гомологические группы Бетти различных известных тогда типов. Кроме того, был выделен ряд специальных классов незамкнутых множеств, например, гомологические ретракты, множества, гомологически достижимые извне и изнутри, и т. д., причем была доказана и топологическая инвариантность этих классов. Наконец, были определены области двойственности и доказана содержательность этого понятия выделением таких областей двойственности, в которых выполнен закон двойственности Понтрягина по модулю и которые достаточно обширны (содержат все ошкуренные полиэдры).

Следует отметить, что закон двойственности П. С. Александрова в применении к замкнутым множествам $A \subset S^n$ дает новую теорему двойственности для этих последних, впервые позволившую установить дуализируемость гомологических групп замкнутых множеств по дискретной (например по целочисленной) области коэффициентов. Исследования П. С. Александрова были дополнены Е. Ф. Мищенко, построившим интересные примеры, а также области двойственности, в которых верна двойственность Понтрягина для любых групп коэффициентов. Далеко идущее развитие теория топологической двойственности произвольных множеств получила в работах К. А. Ситникова. Ситников прежде всего доказывает свой первый закон двойственности, более сильный, чем закон двойственности П. С. Александрова, в том смысле, что он позволяет улавливать гомологические связи между двумя данными множествами, а вместе с тем и их циклическую структуру и в тех случаях, когда закон двойственности П. С. Александрова вырождается в тождество $0=0$. Этот результат достигается нахождением более удачных и более обширных гомологических групп, подвергающихся дуализации, чем группы, фигурирующие в теореме П. С. Александрова. Грубо говоря, закон двойственности П. С. Александрова получается из первого закона двойственности К. А. Ситникова переходом к некоторым фактор-группам. Далее, К. А. Ситников установил второй закон двойственности, впервые позволивший доказать дуализируемость классических групп Бетти «с компактными носителями». Оба закона в двойственности Ситникова погружены в построенную им теорию «изоморфизма двойственности», связывающего между собою посредством изоморфизмов или посредством двойственностей все до сих пор известные и естественно определяемые гомологические группы произвольного множества $A \subset S^n$ и его дополнения $B = S^n \setminus A$. После работ Ситникова можно сказать, что все естественно определяемые гомологические группы произвольных множеств оказываются дуализируемыми, что представляет собою результат, действительно окончательный. Единственным исключением, но исключением, в известном смысле подтверждающим правило, является недуализируемость гомологических групп, основанных на конечных покрытиях (так называемых групп Чеха), доказанная П. С. Александровым на совершенно элементарных примерах. Этого следовало ожидать, так как вся совокупность исследований по комбинаторной топологии незамкнутых множеств убедительно показывает, что адэкватным инструментом для их исследования являются лишь бесконечные (локально- или звездно-конечные) покрытия.

Далее Ситников показывает, что установленные им законы двойственности могут быть усилены и заменены так называемой спектральной двойственностью, связывающей, в двух взаимно-дополнительных множествах, не только гомологические группы, выступающие в виде предельных групп тех или иных спектров, но и сами эти спектры.

Наконец, Ситников строит максимальные области двойственности, для которых выполнена теорема двойственности Понтрягина, приходит к понятиям квази-замкнутых и квази-открытых множеств и таким образом в известном смысле завершает и это направление исследования.

Параллельно с некоторыми работами Ситникова развиваются исследования Н. Берикавшили—ученика Г. С. Чогошвили. Берикашвили приблизительно одновременно с Ситниковым доказывает его второй закон двойственности и развивает общую теорию абстрактных спектров групп, давая ей аксиоматическое построение.

В этом же направлении лежат и некоторые работы Н. Я. Виленкина, приводящие его к усилению как закона двойственности П. С. Александрова, так и закона двойственности К. А. Ситникова.

Второй частью комбинаторной топологии незамкнутых множеств является гомологическая теория размерности этих множеств.

После того как А. А. Марков доказал теорему П. С. Александрова о существенных отображениях для любых множеств, лежащих в эвклидовых пространствах, П. С. Александров распространил ту же теорему и примыкающие к ней теоремы на случай любых нормальных пространств. Этим были созданы предпосылки для построения гомологической теории размерности нормальных пространств, что и было выполнено П. С. Александровым в 1946—1947 гг.

Однако, построенная на основе конечных покрытий (единственный случай, когда построенная на этой основе гомологическая теория, некомпактных пространств все же оказалась содержательной), теория П. С. Александрова не дала ожидаемых приложений при изучении множеств, лежащих в эвклидовых пространствах. Эти приложения получил (на основе бесконечных звездно-конечных покрытий) К. А. Ситников, доказав (1952) для любых незамкнутых множеств n-мерного эвклидова пространства центральный результат гомологической теории размерности — так называемую теорему о препятствиях—и тем решив задачу, поставленную еще в 1935 г. Одновременно Ситников дает внутреннюю гомологическую характеристику размерности, основанную на бесконечных покрытиях, а также новую гомологическую характеристику. При этом им доказана представляющая самостоятельный интерес деформационная теорема (цикл z, не ограничивающий в дополнении к данному множеству A, не теряет этого свойства при совместных деформациях множества A и цикла z, конечно, при условии, что множество и тело цикла остаются непересекающимися в любой момент деформации).

Попутно Ситников решает задачу, поставленную еще Урысоном, а именно, строит такое двумерное множество в трехмерном эвклидовом пространстве R^3, которое не разрезает никакой области этого пространства; кроме того, Ситников строит двумерное же множество в R^3, при любом $\varepsilon>0$, допускающее ε-сдвиги в одномерный полиэдр.

В связи с этим возникает новый метрический инвариант незамкнутых множеств— так называемая метрическая размерность,—исследованию которого посвящены некоторые работы Ю. М. Смирнова и его учеников.

С. И. Альбер (*Томск*). **Гомологии многообразий.** Гомологии многообразий получили многочисленные приложения в гомотопической теории, вариационном исчислении в целом, дифференциальной геометрии и многих других разделах математики. Среди различных методов, предложенных для их исследования, повидимому, наиболее эффективны прямые геометрические методы, основанные на теории двойственности Л. С. Понтрягина. Таким методом Л. С. Понтрягин впервые исследовал гомологии компактных групп Ли. В последнее время при исследовании гомологий однородных пространств докладчиком был разработан новый общий метод, в котором главную роль играют двойственные гомологические последовательности.

Обозначим через $\Delta^s(M; \Sigma)$ группу гомологий комплекса M по группе коэффициентов Σ, через $\Delta^s(M, C; \Sigma)$—группу относительных гомологий комплекса M по модулю подкомплекса C, через $\Delta^s(C; \Sigma)$—группу гомологий комплекса C.

Пусть i_*, j_*—операторы вложения и высечения П. С. Александрова, Δ_*—граничный оператор. Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_*} \Delta^s(C; \Sigma) \xrightarrow{i_*} \Delta^s(M; \Sigma) \xrightarrow{j_*} \Delta^s(M, C; \Sigma) \xrightarrow{\Delta_*} \Delta^{s-1}(C; \Sigma) \xrightarrow{i_*} \cdots \qquad (1)$$

назовем гомологической последовательностью пары (M, C).

Пусть A, B—непересекающиеся подкомплексы ориентируемого многообразия M^n, причем M^n/A гомотопически эквивалентно B, а M^n/B—гомотопически эквивалентно A. Пусть Γ и Φ—двойственные в смысле теории характеров Л. С. Понтрягина дискретная и бикомпактная группы $p+q=n$.

Тогда можно доказать, что точные гомологические последовательности пар $(M^n, A; \Gamma)$ и $(M^n, B; \Phi)$ двойственны, т. е. в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\Delta_*"] & \Delta^p(A;\Gamma) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, dash] & \Delta^p(M^n;\Gamma) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, dash] & \Delta^p(M^n, A;\Gamma) \arrow[r, "\Delta_*"] \arrow[d, dash] & \Delta^{p-1}(A;\Gamma) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, dash] & \cdots \\
\cdots & \Delta^q(M^n, B;\Phi) \arrow[l, "\Delta_*"'] & \Delta^q(M^n;\Phi) \arrow[l, "j_*"'] & \Delta^q(B;\Phi) \arrow[l, "i_*"'] & \Delta^{q+1}(M^n, B;\Phi) \arrow[l, "\Delta_*"'] & \cdots \arrow[l, "j_*"']
\end{tikzcd} \tag{2}$$

группы, соединенные по вертикали знаком |, двойственны.

Заметим, что операторы вложения и высечения взаимно сопряжены, а граничный оператор является самосопряженным. Поэтому к каждому квадрату диаграммы можно применить лемму П. С. Александрова о сопряженных гомоморфизмах.

На основе этих результатов полностью исследованы гомологии ортогональной и спинорной групп. При этом опровергнута гипотеза, что спинорная группа не имеет кручения. Тем же методом изучены гомологии однородных пространств как с компактными, так и с некомпактными группами преобразований: многообразий Грассмана, многообразий сфер, элементов и др. Отметим, что для исследования целочисленных гомологий неориентируемых или некомпактных многообразий эти многообразия погружаются в специально подобранные ориентируемые компактные многообразия.

Двойственные гомологические последовательности могут быть применены также для полного исследования гомологической структуры топографической системы функции $f(x)$ на многообразии M^n, т. е. гомологий критических множеств, поверхностей уровня, областей меньших и больших значений. Допустим для простоты, что функция имеет на многообразии конечное число критических уровней $c_1 > c_2 > \cdots > c_k$.

Положим

$$A_i = \{f \leqslant c_i\},$$
$$B_i = \{f \geqslant c_i\}.$$

Для исследования гомологий топографической системы применяются двойственные точные гомологические последовательности пары двойки $(A_i, A_{i+1}; \Gamma)$ и тройки $(M^n, B_i, B_{i-1}; \Phi)$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\Delta_*"] & \Delta^p(A_{i+1};\Gamma) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, dash] & \Delta^p(A_i;\Gamma) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, dash] & \Delta^p(A_i, A_{i+1};\Gamma) \arrow[r, "\Delta_*"] \arrow[d, dash] & \Delta^{p-1}(A_{i+1}, \Gamma) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, dash] & \cdots \\
\cdots & \Delta^q(M^n, B_i;\Phi) \arrow[l, "\Delta_*"'] & \Delta^q(M^n, B_{i-1};\Phi) \arrow[l, "j_*"'] & \Delta^q(B_i, B_{i-1};\Phi) \arrow[l, "i_*"'] & \Delta^{q+1}(M^n, B_i;\Phi) \arrow[l, "\Delta_*"'] & \cdots \arrow[l, "j_*"']
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Группы относительных гомологий $\Delta^p(A_i, A_{i+1}; \Gamma)$ естественно назвать индексными гомологическими группами по области коэффициентов Γ критического уровня $\{f=c_i\}$. Используя диаграмму (3), можно изучить индексные гомологические группы функции $f(x)$, а также исследовать изменение гомологий поверхностей уровня и областей меньших и больших значений при переходе через критический уровень.

В. Г. Болтянский (*Москва*). **Гомотопические классификационные задачи второй ступени.** Имеется ряд классических результатов, относящихся к гомотопическим задачам второй ступени. Сюда относятся классические теоремы Хопфа, Понтрягина, Стинрода. Отметим также классификационную теорему М. М. Постникова, полностью решающую вопрос для случая непрерывных отображений. Эти результаты являются частными случаями классификационных теорем для косых произведений, опирающихся на общую формулу второго препятствия, полученную в 1952 г. докладчиком:

$$Z_3 + Kb^2D^r + D^r \smile \widetilde{Y}^2_3.$$

На основании этой формулы удается дать полную гомотопическую классификацию секущих поверхностей косых произведений в случае, когда слой асферичен в размерностях, меньших n, база является $(n+1)$-мерным полиэдром, а характеристический класс косого произведения тривиален.

Получаемая таким образом теорема содержит в качестве частных случаев теоремы Стинрода и Постникова; она завершает рассматриваемый круг вопросов.

Существует также ряд других гомотопических задач, в частности, задача о снятии секущей поверхности. Соответствующая задача второй ступени также решается аналогичными методами.

Р. В. Гамкрелидзе (*Москва*). **Характеристические классы комплексных алгебраических многообразий.** 1. Понятие характеристического класса возникло в работе Штифеля [1] в 1935 г. при исследовании циклов препятствий реперных полей на гладких действительных многообразиях.

Вскоре после этого появились работы Уитнея [2], в которых впервые сформулировано понятие косого произведения и методом, аналогичным методу Штифеля, построены циклы препятствий реперных полей для пучков сфер.

Следующий существенный прогресс в этом направлении был достигнут в трудах Л. С. Понтрягина о характеристических классах гладких действительных многообразий, включающих в качестве частного случая классы Штифеля—Уитнея (см. [3], [4]).

Обобщая процесс тангенциального отображения, Л. С. Понтрягин поставил в соответствие каждому ориентированному гладкому действительному многообразию некоторое подкольцо целочисленного кольца гомологий этого многообразия—характеристическое кольцо Понтрягина.

Наконец, в 1946 г. появилась работа Черна [5] о характеристических классах комплексных многообразий. Используя в основном методы Штифеля—Уитнея и Понтрягина, Черн ставит в соответствие каждому комплексному многообразию комплексное характеристическое кольцо этого многообразия—характеристическое кольцо Черна. В нем можно выбрать базу (мультипликативную), составленную из так называемых классов Черна—комплексных аналогов классов Штифеля—Уитнея.

2. Характеристическое кольцо Понтрягина играет важную роль при изучении топологической и аналитической структуры многообразия, а также во многих задачах теории гомотопий. Поэтому вычисление этого кольца для возможно более широкого класса многообразий может оказать важные услуги. Однако вычисление характеристических классов на основе существующих определений кольца Понтрягина представляет почти непреодолимые трудности даже в простейших случаях.

3. Первый шаг в направлении вычисления этих циклов сделан в заметке Бурдиной [6], где классы Понтрягина комплексного многообразия выражены через классы Черна этого многообразия при помощи операций кольца гомологий.

4. Для комплексных алгебраических многообразий классы Черна вычислены в заметке докладчика [7]. В полученных формулах циклы Черна выражены через довольно простые проективные инварианты многообразия. Попутно доказан интересный факт, что циклы Черна комплексного алгебраического многообразия являются линейными комбинациями алгебраических подмногообразий этого многообразия.

5. Применяя методы, развитые в заметке [7], и используя формулы Бурдиной, можно вычислить кольцо Черна комплексного алгебраического многообразия. Представляется весьма правдоподобным, что в каждом классе этого кольца содержится цикл, являющийся линейной комбинацией алгебраических подмногообразий многообразия.

Лит.: 1. Stiefel, Comm. Math. Helv., 8, (1935/36), 305—353. 2. Whitney, Lectures in Topology, (1941), 101—141. 3. Понтрягин Л. С., Мат. сб., 21 (63): 2, (1947), 233—284. 4. Понтрягин Л. С., Мат. сб., 24 (66): 2, (1949), 129—162. 5. Chern, Ann. Math., 47, 1, (1946), 85—121. 6. Бурдина В. И., ДАН СССР, **96**, 6, (1954), 1085—1088. 7. Гамкрелидзе Р. В., ДАН СССР, **90**, 5, (1953), 719—722.

Е. Б. Дынкин (*Москва*). **Топология групп Ли.**

В. А. Ефремович (*Иваново*). **Близостная топология многообразий.**

Л. В. Келдыш (*Москва*). **Монотонные отображения компактов.** 1. Одним из важных вопросов теории непрерывных отображений компактов является вопрос о повышении размерности при непрерывном отображении. Известны классические примеры непрерывных отображений n-мерного куба на $(n+k)$-мерный, нульмерного компакта—на произвольный компакт и т. д. В то же время, при некоторых непрерывных отображениях (например, при гомеоморфизме) размерность не повышается. Вопрос о повышении размерности связан, с одной стороны, со свойствами непрерывного отображения, с другой—со структурой отображаемого компакта.

В настоящее время интенсивно изучаются открытые отображения (т. е. отображения, при которых открытое множество переходит в открытое) и монотонные отображения (отображения, при которых прообраз каждой точки есть континуум). При этом большое внимание уделяется монотонно-открытым отображениям.

2. При открытых отображениях отрезка и квадрата размерность не повышается. Не повышают размерности и монотонные отображения отрезка или квадрата. П.С. Александров поставил проблему о возможности открытого отображения n-мерного куба, $n \geqslant 3$, на $(n+k)$-мерный; $k \geqslant 1$. Решения этой проблемы еще нет в литературе. Правда, в 1953 г. Р. Д. Андерсон заявил в Bull. Amer. Math. Soc., что им построено монотонно-открытое отображение n-мерного куба на $(n+k)$-мерный. Но это сообщение не содержит никаких указаний на построение, и изложение результата до сих пор не появилось в печати.

Докладчиком были исследованы монотонные неприводимые отображения куба и построен пример монотонного неприводимого отображения трехмерного куба на четырехмерный. Отсюда легко следует существование монотонного неприводимого отображения n-мерного куба на $(n+k)$-мерный для $n \geqslant 3$, $k \geqslant 1$. Таким образом, для монотонных отображений куба мы имеем качественное отличие случая $n \geqslant 3$ от случая $n \leqslant 2$. Представляется очень интересным выяснить причины этого различия.

3. Существуют элементарные примеры монотонных отображений, повышающих размерность. Вопрос же о существовании открытых отображений, повышающих размерность, труден и впервые был решен А. Н. Колмогоровым (1938), который построил пример открытого отображения одномерного континуума на двумерный. Вслед за этим был построен ряд примеров компактов (Каждан, Локуциевский, Андерсон), открыто отображающихся на квадрат, на куб и на гильбертов параллелепипед. В 1935 г. Андерсон доказал, что существует одномерный континуум, монотонно-открыто отображающийся на гильбертов параллелепипед. Отсюда следует, что для всякого компакта Y существует одномерный компакт, который монотонно-открыто отображается на Y. Следует также отметить построенный Андерсоном пример монотонно-открытого отображения плоского одномерного континуума на квадрат, который тесно связан с монотонно-открытым отображением квадрата на себя.

Монотонные отображения могут повышать, понижать и сохранять размерность. Вопрос о структуре образа $f(X)$ компакта X при монотонном отображении, в частности, вопрос о размерности образа $f(X)$, тесно связан со свойствами непрерывного разбиения компакта X на континуумы $f^{-1}(x)$, именно—со структурой континуумов $f^{-1}(x)$ и их расположением в X.

В последнее время выходит много работ, посвященных изучению такого рода зависимостей. В этом направлении было бы интересно указать достаточные условия, которым должно удовлетворять непрерывное разбиение куба, соответствующее монотонному отображению на компакт большей размерности.

М. М. Постников (*Москва*). **Алгебраические методы гомотопической топологии.** 1. Основной метод гомотопической топологии—сведение геометрических задач к задачам алгебры с помощью введения соответствующих инвариантов.

2. Простейшие инварианты—группы гомологий. Развитие теории гомологий в последнее время. Создание новой ветви алгебры—гомологической алгебры.

3. Связи между группами гомологий и гомотопическими группами. Натуральная система пространства.

4. Основные задачи гомотопической топологии: задача алгебраической характеризации гомотопического типа и задача гомотопической классификации непрерывных отображений. Натуральная система как исчерпывающий инвариант.

5. Вычисление натуральных систем. Эффективизация общих решений основных гомотопических задач. Связь между факторами натуральных систем и общими контрагомологическими операциями.

6. Различные обобщения и нерешенные задачи.

Д. А. Райков (*Москва*). **Топология функциональных пространств.**

В. А. Рохлин (*Иваново*). **Характеристические циклы гладких многообразий.** Среди геометрических задач, приводящих к понятию характеристического цикла гладкого замкнутого многообразия, наиболее известна задача об особенностях векторного поля или системы векторных полей, определенных на многообразии. Связь между этой задачей и топологическими свойствами многообразия была замечена еще Пуанкаре. Хопф доказал, что сумма индексов особенностей векторного поля равна эйлеровой характеристике многообразия. Штифель и Уитней определили свои характеристические циклы как циклы особенностей систем векторных полей. Понтрягин рассмотрел более общую задачу о векторных полях и привел ее в связь со своими характеристическими циклами.

Основное определение, которое Понтрягин дал характеристическим циклам, возникло из другой геометрической задачи, именно—из изучения тангенциального отображения ориентированного многообразия. Результаты, полученные в этом направлении, явились далеко идущим обобщением теоремы Хопфа о степени сферического изображения многообразия, лежащего в эвклидовом пространстве, на единицу большей размерности.

В дальнейшем характеристические циклы гладких многообразий стали предметом многочисленных исследований и обобщений. Изучались их общие свойства и вычислялись характеристические циклы конкретных многообразий. Черн перенес определение Понтрягина на комплексные и на неориентированные действительные многообразия. Оба основных определения характеристических циклов были перенесены в общую теорию косых произведений и заняли там одно из центральных мест.

Том и У вычислили, пользуясь квадратами Стинрода, характеристические циклы Штифеля—Уитнея произвольного гладкого замкнутого многообразия; в частности, была доказана топологическая инвариантность этих циклов. Этим, в силу общих теорем Черна, была доказана для неориентированных многообразий топологическая инвариантность всех характеристических циклов Понтрягина—Черна. В противоположность этому, топологическая инвариантность характеристических циклов Понтрягина ориентированных многообразий не доказана, хотя в этом направлении и получены некоторые результаты.

Единственный характеристический цикл Понтрягина, топологическая инвариантность которого полностью доказана, есть характеристическое число четырехмерного ориентированного замкнутого многообразия (Рохлин, Том). Результат этот был получен методами теории внутренних гомологий, построенной указанными авторами, причем рассматриваемое характеристическое число было выражено через гомологические инварианты многообразия. Для других характеристических циклов Понтрягина доказана лишь топологическая инвариантность по некоторым модулям.

Общий интерес к теории характеристических циклов многообразий вызван в первую очередь связями этой теории с разнообразными проблемами топологии и геометрии. Выше уже шла речь о векторных полях, тангенциальных отображениях и внутренних гомологиях. Дальнейшими примерами могут служить дифференциальная геометрия, гомотопическая теория непрерывных отображений, проблема топологической инвариантности тангенциального косого произведения, проблема вложения k-мерного многообразия в эвклидово пространство размерности, меньшей $2k$.

Ю. М. Смирнов (*Москва*). **Теория топологических пространств.** Основные понятия абстрактной топологии—компактность и отделимость. Современное широкое понимание компактности как свойства топологического пространства иметь ко всякому открытому покрытию некоторого класса вписанное в него открытое покрытие другого класса. Различные виды компактности и связи между ними: метрические пространства—паракомпактны, финально компактные T_3-пространства—сильно-паракомпактны, паракомпактные T_2-пространства—нормальны и т. п. Современное решение одной из основных проблем абстрактной топологии—проблемы метризации. Новые достаточные условия метризуемости: возможность представления T_1-(T_3-) пространства в виде локально-конечной суммы замкнутых (открытых) метризуемых подмножеств или же для локально-компактных T_3-пространств—возможность разложения в сумму счетного числа множеств со счетной базой. Аддитивные по множествам свойства топологических пространств.

Равномерная топология: равномерные пространства А. Вейля и пространства близости, введенные В. А. Ефремовичем. Взаимно-однозначное соответствие между пространствами близости, возможными на данном T_ρ-пространстве, и его бикомпактными расширениями; связь между равномерными структурами, порождающими данное пространство близости, и некоторыми его расширениями. Понимание равномерных структур с точки зрения покрытий. Пополнение равномерного пространства как максимальное «близостное» расширение, на которое каждое открытое покрытие данной равномерной структуры можно продолжить в открытое покрытие.

А. И. Фет (*Новосибирск*). **Вариационные исчисления в целом.**

Г. С. Чогошвили (*Тбилиси*). **Алгебраические методы в теоретико-множественной топологии.** 1. Возникновение современной алгебраической топологии из старой комбинаторной топологии в результате систематического применения методов теории групп и теории характеров.

2. Аппроксимация компактов полиэдрами и создание теорий гомологии компактов, в особенности спектральной теории, основанной на нервах конечных покрытий.

3. Аппроксимации произвольных множеств извне и изнутри открытыми и замкнутыми множествами, спектры, основанные на бесконечных покрытиях, и создание алгебраической топологии произвольных пространств: установление соотношений двойственности различных типов для любых множеств, получение основных фактов теории размерности, доказательство ряда гомотопических теорем. Построение всевозможных групп гомологий пространств единым спектральным методом и вопросы о различных областях коэффициентов.

4. Теория гомологии, как часть алгебры, и обоснование алгебраической топологии. Аксиоматическая теория спектров и абстрактный закон двойственности для незамкнутых множеств. Некоторые примеры чисто геометрических предложений теоретико-множественной топологии, найденных алгебраическими методами.

СЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ

В. В. Вагнер (*Саратов*). **Теория поля локальных поверхностей.** С начала сороковых годов большая часть работ саратовских геометров была так или иначе связана с теорией поля локальных поверхностей в общем дифференциально-геометрическом пространстве X_n, на которой основывается более широкое применение дифференциальной геометрии к вариационному исчислению, чем мы это имеем в геометрии Финслера и геометрии Картана. Формальным аппаратом для теории поля локальных поверхностей является общая теория составного многообразия, которая начала разрабатываться в эти же годы.

Общее составное многообразие $L_m(B_n)$ определялось при этом как множество m-пространств одного и того же типа L_m, поставленное во взаимно однозначное соответствие с множеством точек базисного m-пространства X_n. Пространство $L_m(P)$, соответствующее точке P, называлось локальным пространством, ассоциированным с точкой P базисного пространства. При этом предполагалось задание некоторого множества допустимых полей координатных систем в локальных пространствах. Наиболее важными с точки зрения приложений являются составные многообразия вида $X_m(X_n)$ и вид $K_m(X_n)$, где K_m есть m-пространство Клейна. Среди составных многообразий последнего типа выделялись голономизированные составные многообразия, у которых с каждой координатной системой базисного пространства ассоциировано определенное поле локальных координатных систем, называемое голономным полем, соответствующим этой координатной системе, в частности, дифференциально-голономизированные составные многообразия, локальные пространства которых можно рассматривать как пространства геометрических дифференциальных объектов данного типа. Таким образом, теория составного многообразия является дальнейшим развитием общих идей Картана и Схоутена о локальных пространствах. Существенно новым являлось изучение составных многообразий вида $X_m(X_n)$, из которых могут быть получены составные многообразия с локальными пространствами Клейна путем задания поля локального геометрического объекта. Связность в составном многообразии $X_m(X_n)$ определялась заданием системы дифференциальных уравнений, зависящих от кривой в базисном X_n, решения которых определяют отображения локальных X_m, ассоциированных с точками данной кривой. Связность называлась линейной, если она определялась системой уравнений Пфаффа. Далее, было определено понятие абсолютной производной от поля произвольного локального дифференциального объекта, в частности, геометрического дифференциального объекта, заданного вдоль кривой базисного X_n. В силу универсального характера составного многообразия $X_m(X_n)$ полученная теория связности и абсолютного дифференцирования имеет универсальный характер. Однако она представляет интерес не только поэтому, но и потому, что в теории поля локальных поверхностей в X_n ее приходится применять именно в таком самом общем виде. Под заданием поля локальных m-поверхностей в X_n подразумевалось задание m-поверхности в каждом локальном пространстве некоторого голономизированного составного многообразия $K\,(X_n)$, для которого данное X_n является базисным пространством. Рассматривая каждую m-поверхность поля как общее дифференциально-геометрическое пространство X_n, мы получаем составное многообразие $X_m(X_n)$. Отыскание полной системы дифференциальных инвариантов и решение проблемы эквивалентности для полей локальных m-поверхностей требуют, прежде всего, отыскания в составном многообразии $X_m(X_n)$ линейной связности, определяемой внутренним образом. Этого также требует и решение более частной задачи нахождения условия постоянства поля локальных m-поверхностей, т. е. условия существования голономных полей локальных координат, относительно которых уравнения m-поверхностей поля во всех точках одинаковы.

Очевидно, что множество точек всех локальных пространств произвольного составного многообразия $L_m(B_n)$ можно рассматривать как расслоенное $(n+m)$-пространство с m-мерными слоями, в частном случае—как волокнистое $(n+m)$-пространство или косое произведение. Задание поля локальных m-поверхностей в X_n можно рассматривать как задание в соответствующем волокнистом пространстве $(n+m)$-поверхности, пересекающей каждое волокно по m-поверхности. Эта точка зрения имеет из вестные преимущества, но в первой половине сороковых годов, к которой относится развитие общей теории составного многообразия и общей теории поля локальных m-поверхностей, теория волокнистых пространств только начала разрабатываться, так что основные результаты общей теории составного многообразия были получены без привлечения теории волокнистых пространств и до того, как последняя вообще получила применение в дифференциальной геометрии.

Общая теория составного многообразия была развита в ряде работ В. В. Вагнера [1], где, в частности, подробно исследованы линейная связность и абсолютное дифференцирование в составном многообразии типа $X_m(X_n)$, изоморфная связность в составном многообразии типа $K_m(X_n)$ и так называемая дифференциальная связность порядка v в X_n.

Получение всех этих весьма общих результатов требовало создания общей теории геометрических объектов, которая к тому же была необходима для развития многих разделов дифференциальной геометрии. Построение общей теории геометрических объектов, начатое Схоутеном, было продолжено в работах [2], в которых указано, в частности, на связь между теорией геометрических объектов и теорией групп (или обобщенных групп) Ли преобразований арифметического пространства. Нахождение всевозможных типов N-мерных (N-компонентных) геометрических дифференциальных объектов в X_n сводится к нахождению всевозможных непрерывных транзитивных представлений на точечных множествах арифметического N-пространства дифференциальной группы $\mathfrak{D}^{(v,n)}$. Это обстоятельство послужило основой для проведения классификации геометрических дифференциальных объектов в X_n, которой саратовские геометры занимались особо. Так, Ю. Е. Пензов [3] нашел все одномерные и двумерные геометрические дифференциальные объекты в X_n, установил связь между размерностью и классом геометрических дифференциальных объектов в X_1 и указал характеристические объекты для большей части известных обобщенных групп Ли в X_2, А. Е. Либер [4] установил возможные типы комитантов геометрических дифференциальных объектов в X_n и провел подробную классификацию объектов аффинной связности в X_2, В. В. Вагнер [5] нашел все простые геометрические дифференциальные объекты в X_n.

В связи с развитием теории геометрических объектов и для более широкого проникновения алгебраических методов в геометрию возникла необходимость в абстрактно-алгебраическом исследовании псевдогрупп преобразований в арифметическом пространстве. Это привело В. В. Вагнера [6] к определению так называемых обобщенных групп и обобщенных груд и к абстрактно-алгебраическому их исследованию Ему удалось, в частности, доказать основные теоремы о представлении обобщенных групп и обобщенных груд с помощью частичных взаимно однозначных преобразований. Некоторые вопросы абстрактной теории обобщенных групп рассматривал также А. Е. Либер [7]. Обобщенные груды и обобщенные группы имеют важное применение в вопросах обоснования дифференциальной геометрии.

Теория поля m-поверхностей в X_n нуждается в предварительном построении геометрии m-поверхностей в пространстве Клейна, при этом особенно важными оказались центрально-аффинная и связанные с ней обще-аффинная и проективная геометрия m-поверхностей. Изучение геометрии гиперповерхностей и $(n-2)$-поверхностей, а также гиперполос в центрально-аффинном n-пространстве E_n было проведено в работах [8], [9], геометрия кривых и гиперторсов в E_n была построена Н. Ф. Ржехиной [10]. В диссертации И. В. Фроловой изучена геометрия поверхностей, лежащих на изотропном гиперконусе в шестимерном центрально-аффинном полуметрическом пространстве. П.М. Олоничев [11] разработал обще-аффинную и центрально-проективную геометрию гиперполос. Геометрия m-поверхности (для любого числа m) в аффинных и проективных пространствах и вообще в произвольных пространствах Клейна была развита в работах А. Е. Либера [12], который нашел внутренне определяемое оснащение или дооснащение m-поверхностей в обще-аффинных, центрально-аффинных или проективных пространствах. С помощью этих оснащений или дооснащений были внутренним образом определены основные геометрические дифференциальные объекты на m-поверхности, определяющие данную m-поверхность с точностью до автоморфизмов соответствующего пространства. Для m-поверхностей в произвольном пространстве Клейна им были указаны: определенный внутренним образом на m-поверхности геометрический дифференциальный объект Ω, определяющий m-поверхность с точностью до автоморфизмов пространства Клейна, деривационные формулы m-поверхности и система основных инвариантных уравнений, которым удовлетворяет первое дифференциальное продолжение геометрического дифференциального объекта Ω. Все эти результаты были получены на основе общей теории геометрических объектов и теории составного многообразия.

Изучение самой теории поля локальных m-поверхностей и ее приложений к вариационному исчислению было выполнено прежде всего в ряде работ В. В. Вагнера [8], [9], [13]. Им были построены геометрическая интерпретация простейшей вариационной задачи Лагранжа и соответствующая ей теория поля локальных кривых в X_3, геометрическая теория сингулярной вариационной задачи и соответствующая ей теория поля локальных сингулярных гиперповерхностей в X_n, геометрическая теория общей вариационной задачи Лагранжа, заданной «полувнутренним» образом, и соответствующая ей теория поля локальных m-мерных гиперполос в X_n; последняя применяется также к геометрической теории сингулярной задачи вариационного исчисления и к геометрической теории механических систем с нелинейными неголономными связями. К этому же кругу вопросов относятся работы Н. Ф. Ржехиной [10], построившей теорию поля локальных кривых и локальных гиперторсов в X_n, диссертация Г. И. Жотикова, в которой построена теория поля локальных m-поверхностей (при $(m+1)\ (m+2)\geqslant 2n$) в X_n и дана соответствующая геометрическая теория общей вариационной задачи Лагранжа, а также работа П. И. Токарева [14], в которой развита геометрическая теория второй вариации в задаче Лагранжа.

Довольно специальным случаем общей теории поля локальных m-поверхностей оказалась обыкновенная геометрия Финслера; ее разработка с новой точки зрения выполнена в работе [8]. Кроме того, двумерные пространства с алгебраической финслеровой метрикой и полуметрикой рассматривал А. Е. Либер [15], полученные им результаты нашли применение в теории двумерных поверхностей в аффинных и проективных пространствах и в теории p-тканей, в частности, им была найдена тензорная характеристика p-ткани в X_2, топологически эквивалентной p-ткани прямых эвклидовой плоскости.

Далее ряд работ саратовских геометров был отведен построению геометрической теории вариационных задач для кратных интегралов. Здесь прежде всего следует отметить полученные впервые в работе [16] на чисто геометрическом пути достаточные условия в задаче Лагранжа для кратных интегралов. Далее в работах [17] была развита геометрия пространства с ареальной метрикой и указаны ее приложения к геометрической теории вариационных задач для кратных интегралов, в частности, особо исследован случай гиперареальной метрики, отвечающий вариационной задаче для $(n-1)$-кратного интеграла в n-пространстве; в этом случае подробно развита соответствующая теория поля локальных индикатрис. Удалось также указать геометрическую интерпретацию экстремальных поверхностей в задаче Лагранжа для кратных интегралов. К этому направлению примыкает работа С. А. Каганова [18], в которой изучаются геометрия пространства с сингулярной гиперареальной метрикой и соответствующее ей поле локальных гиперполос в $\mathfrak{E}_n (X_n)$, где $\mathfrak{E}_n$—пространство контравариантных векторных плотностей.

Лит.: 1. Вагнер В. В., ДАН СССР, **40**, № 3, (1943), 99—102; ДАН СССР, **46**, № 8, (1945), 335—338; Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 8, (1950), 11—72. 2. Вагнер В. В., ДАН СССР, **46**, № 9, (1945), 383—386; добавление к книге Веблена и Уайтхеда «Основания дифференциальной геометрии», ИЛ, М., (1949). 3. Пензов Ю. Е., ДАН СССР, **54**, № 7, (1946), 567—570; Матем. сб., 26 (68) : 2, (1950), 161—182; ДАН СССР, **80**, № 4, (1951), 537—540; ДАН СССР, **104**, № 3, (1955), 356—359; Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 8, (1950), 382—413. 4. Либер А. Е., ДАН СССР, **80**, № 4, (1951), 529—532; Матем. сб., 27 (69):2, (1950), 249—266. 5. Вагнер В. В., ДАН СССР, **69**, № 3, (1949), 293—296. 6. Вагнер В. В., ДАН СССР, **84**, № 6, (1952), 1119—1122; Матем. сб., 32 (74):3, (1953), 545—632. 7. Либер А. Е., Матем. сб., 33 (75):3, (1953), 531—544; ДАН СССР, **97**, № 1, (1954), 25—28. 8. Вагнер В. В., Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 7, (1949), 65—166. 9. Вагнер В. В., Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 8, (1950), 198—272. 10. Ржехина Н. Ф., ДАН СССР, **72**, № 3, (1950), 461—464; Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 9, (1952), 411—430. 11. Олоничев П. М., ДАН СССР, **80**, № 2, (1951), 165—168. 12. Либер А. Е., ДАН СССР, **85**, № 1, (1952), 37—40; ДАН СССР, **90**, № 2, (1953), 137—140; Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 10, (1955), 193—223; Научный ежегодник СГУ за 1954 г., 20—23. 13. Вагнер В. В., ДАН СССР, **48**, № 4, (1945), 245—248; Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 6, (1948), 257—364; Матем. сб., 21 (63):3, (1947), 321—364. 14. Токарев П. И., Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 9, (1952), 431—455. 15. Либер А. Е., Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 9, (1952), 319—350. 16. Вагнер В. В., ДАН СССР, **54**, № 6, (1946), 483—486. 17. Вагнер В. В., Матем. сб., 19 (61):3 (1946), 341—406; Матем. сб., 20 (62):1, (1947), 3—26; Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 8, (1950), 144—196; ДАН СССР, **55**, № 2, (1947), 91—94. 18. Каганов С. А., ДАН СССР, **75**, № 4, (1950).

Н. В. Ефимов (*Москва*). **Обзор некоторых результатов по качественным вопросам теории поверхностей.** 1. Результаты Г. Хопфа и Шильта (1937—1938), Н. В. Ефимова (1939—1949), Р. Гесли (1950), В. А. Тартаковского (1953) и других авторов об устойчивости относительно непрерывных изгибаний (и более общих деформаций) качественных признаков структуры поверхности вблизи данной точки, о существенном различии между изометрией и непрерывной наложимостью и о локальной неизгибаемости. Некоторые нерешенные вопросы.

2. Проблемы жесткости высших порядков и аналитической изгибаемости.

3. Исследования, посвященные поверхностям отрицательной кривизны и поведению асимптотических линий. Результаты Н. В. Ефимова (1953—1955) и Гейнца (1955) о поверхностях трехмерного эвклидова пространства, для которых $\sup K<0$, и результаты Д. Блануши (1955) о регулярном вложении плоскости Лобачевского в шестимерное эвклидово пространство.

Г. Ф. Лаптев (*Москва*). **Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.** Доклад посвящен циклу работ, объединенных общим методом исследования, базирующимся на теории представлений групп Ли и на исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана.

Предметом исследований являются многообразия, вложенные в пространства представлений конечных или бесконечных групп Ли, определенных своими инвариантными дифференциальными формами.

К изучению таких многообразий сводится теория пространств со связностью, теория полей объектов, теория многомерных поверхностных интегралов и т. д.

Общий метод исследования таких многообразий основывается на следующей схеме.

А. Строится так называемая фундаментальная последовательность представлений группы путем последовательных продолжений системы дифференциальных уравнений многообразия.

Б. Строятся всевозможные представления, охватываемые фундаментальными представлениями.

В. Изучаются полученные представления и соотношения между ними.

Заметим, что все построенные таким образом представления являются расслоенными многообразиями. Изучаемое многообразие высекает в них подмногообразия, которые и являются полями разнообразных геометрических объектов, инвариантно присоединенными к изучаемому многообразию.

Такой метод построения дифференциальной геометрии многообразий был развит в работах Г. Ф. Лаптева [1], [2], [3], [4] применительно к многообразиям, вложенным в пространства представления конечных групп Ли или в пространства с фундаментально-групповой связностью. В работах А. М. Васильева [5], [6], [7] этот метод был распространен на многообразия, вложенные в пространства представлений бесконечных групп, что придало всему методу определенную завершенность.

Как в перечисленных, так и в ряде других работ этот метод получил разнообразные конкретные приложения.

1. Инвариантное построение дифференциальной геометрии гиперповерхности в проективном пространстве и в пространстве проективной связности дано Г. Ф. Лаптевым [1], [3], [4]. При этом получили обобщение и инвариантное аналитическое определение основные понятия классической проективно-дифференциальной геометрии.

2. Исследование гиперповерхности в $2n$-мерном действительном пространстве, изображающем n-мерное комплексное пространство с действующей в нем аналитической группой, провел А. М. Васильев. Им получены числовые и тензорные характеристики, связанные с четвертым (а иногда и с более высоким) продолжением.

3. Инвариантное построение дифференциальной геометрии гиперповерхности конформного пространства дал М. А. Акивис [8]. Им найдены объекты, связанные с дифференциальными окрестностями первого, второго, третьего и четвертого порядков и выяснен их геометрический смысл. В частности, им найдена система тензоров, определяющих гиперповерхность.

4. Дифференциальную геометрию гиперкомплекса прямых в четырехмерном проективном пространстве, а в последнее время и в пространстве любого числа измерений построил в инвариантной форме К. И. Гринцевичус [9]. Он нашел разнообразные объекты, охватываемые основным фундаментальным объектом гиперкомплекса, и выяснил их геометрический смысл с различных точек зрения.

5. Инвариантное оснащение n-мерной поверхности N-мерного аффинного пространства было найдено Г. Ф. Лаптевым [4] в случае $N=\frac{n(n+3)}{2}$ и затем П. И. Швейкиным [10] в более общем случае: $N=\sum_{q=0}^{p-1} C_{n+q}^{q+1}$, где $p-1$ — любое целое положительное число.

6. В последнее время П. И. Швейкин решил задачу аффинного инвариантного оснащения поверхности в общем случае при любых n и N. Попутно он нашел фундаментальный объект, определяющий поверхность, дал ряд других аффинно-инвариантных построений, связанных с поверхностью.

7. Основы дифференциальной геометрии $2m$-мерной поверхности $2n$-мерного аффинно-симплектического пространства построила Н. М. Остиану. Особому изучению подверглись геометрические конструкции, связанные с поверхностью, в случае $n=2m$.

8. Основы геометрии многомерного поверхностного интеграла построила М. В. Васильева [12], [13] в случае, когда интеграл зависит от производных первого порядка. При этом автоматически возникли основные понятия, связанные с вариационным исчислением.

9. Двумерный интеграл в трехмерном пространстве, зависящий от производных первого и второго порядков, рассмотрел в своей работе Л. Е. Евтушик [14].

Лит.: 1. Лаптев Г. Ф., ДАН СССР, 65, № 2, (1949). 2. Лаптев Г. Ф., ДАН СССР, 78, № 2, (1951). 3. Лаптев Г. Ф., Труды Моск. мат. общ., 2, (1953), 275—382. 4. Лаптев Г. Ф., Диссертация, МГУ, (1951). 5. Васильев А. М., ДАН СССР, 79, № 1, (1951). 6. Васильев А. М., Диссертация, МГУ, (1952). 7. Васильев А. М., ДАН СССР, 82, № 4, (1952). 8. Акивис М. А., ДАН СССР, 82, № 3, (1952); Мат. сб., 31:1, (1952). 9. Гринцевичус К. И., Диссертация, МГУ, (1955). 10. Швейкин П. И., УМН, вып. 3, (1955), 179—181. 11. Ости-

а н у Н. М., Диссертация, МГПИ, (1955). 12. В а с и л ь е в а М. В., (Ауссем), ДАН СССР, 85, № 2, (1952); Мат. сб., 36:1, (1955). 13. В а с и л ь е в а М. В., Диссертация, МГПИ, (1952). 14. Е в т у ш и к Л. Е., Матем. сб., 37:1, (1955).

А. П. Норден (*Казань*). **Метод нормализации и его приложения к геометрии пространств аффинной связности.** Поверхность X_m проективного пространства P_n называется нормализованной, если каждой ее точке M сопоставлены плоскость P_{n-m}, имеющая с ее касательной плоскостью T_m только одну общую точку M (нормаль первого рода N_1), и плоскость P_{m-1}, принадлежащая T_m, но не проходящая через M (нормаль второго рода N_2). Относя всякому направлению, исходящему из M в касательной плоскости, соответствующую точку на N_2, мы можем определить аффинную связность без кручения так, что при параллельном перенесении направления соответствующая ему точка N_2 испытывает бесконечно малое смещение в плоскости P_{n-m+1}, содержащей N_1. Она называется внутренней связностью Γ_m нормализованной поверхности. Всякую аффинную связность без кручения можно реализовать в качестве внутренней связности X_m в пространстве P_n достаточно высокого числа измерений.

При $m=n$ X_m совпадает с областью пространства P_n, которое нормализуется с помощью сопоставления каждой его точке нормализующей P_{n-1}, не проходящей через точку M, которую можно считать выродившейся нормалью первого рода. Геодезические внутренней связности совпадают в этом случае с прямыми нормализованного пространства и она является проективно-эвклидовой. Всякую связность этого класса можно реализовать как внутреннюю связность нормализованного пространства. Для всякого алгебраического поляритета внутренняя связность эквипроективна, а для поляритета второго порядка она является связностью риманова пространства постоянной кривизны, так что нормализация дает в этом случае проективную интерпретацию Клейна пространства постоянной кривизны. П. А. Широков исследовал симметрические проективно-эвклидовы пространства. Оказалось, что все они реализуются как внутренние связности вырожденных поляритетов второго порядка. Соответствующая интерпретация позволила определить все проективно-эвклидовы пространства Вейля. Аффинно-эвклидова связность может быть получена тем же способом при отнесении всякой точке одной и той же несобственной гиперплоскости.

Нормализация $X_m{}^1$ называется подчиненной нормализации X_m $(m^1<m)$, если $X_m{}^1\subset X_m$, $N_1\subset N_1^1$, $N_2^1\subset N_2$. При этом внутренняя Γ_{m^1} совпадает со связностью индуцированной в пространстве связности Γ_m направлением N_1^1. Это общее положение позволяет рассматривать теорию поверхностей и их внутренних связностей аффинного, центроаффинного, неэвклидова, псевдоэвклидова и эвклидова пространств как частные случаи теории нормализованных поверхностей.

Конфигурация, возникающая при нормализации гиперповерхности X_n пространства P_{n+1}, обладает двойственностью, что позволяет определить наряду с внутренней связностью первого рода Γ_n^1 внутреннюю связность второго рода Γ_n^2. В случае неэвклидовой или эвклидовой теорий поверхностей последняя совпадает со связностью угловой римановой метрики или метрики сферического отображения. В общем случае связности Γ_n^2 и Γ_n^1 сопряжены относительно тензора основной квадратичной формы проективно-дифференциальной геометрии гиперповерхности: сопряженность двух направлений сохраняется, если одно из них переносится параллельно в связности первого рода, а второе—в связности второго рода. Совпадение обеих связностей на двух гиперповерхностях равносильно их проективной наложимости. Внутренние связности поверхности, нормализованной прямыми ее канонического пучка, исследовались Г. В. Бушмановой.

Теория сопряженных связностей нашла свои приложения и в других проблемах геометрии, в частности, в теории сетей. Она была использована В. И. Шуликовским при рассмотрении троек сетей со взаимно аполярными тензорами в тензорном изложении проблемы изгибания на главном основании, теории поверхностей переноса, Фосса и других вопросов классической и проективно-дифференциальной геометрии. В последнее время понятие сопряженных пар обобщено на случай многих связностей китайским геометром Ху-Хэ-Шеном.

Внутренняя связность гиперповерхности второго порядка Q_n, нормализованной взаимно полярными нормалями, есть связность конформно-эвклидова (или псевдоэвклидова) пространства Вейля. Всякая связность этого класса может быть реализована на гиперповерхности Q_n, нормализованной полярно. А. П. Широков построил нормализации, соответствующие конформно-эвклидовым симметрическим пространствам П. А. Широкова. Отображая прямые эвклидова или неэвклидова пространства на точки гиперповерхности Q_4 и сопоставляя изображению всякой прямой изображение ее абсолютной поляры, можно нормализовать Q_4, определив таким образом внутреннюю связность линейчатого пространства. Эта связность была использована М. Я. Цыпкиным, который свел задачу изучения линейчатых поверхностей и комплексов к теории кривых и гиперповерхностей внутренней римановой геометрии линейчатого пространства.

Отображая стереографически эвклидово пространство E_n на сферу Q_n пространства E_{n+1} и нормализуя эту сферу полярно, можно придти к понятию нормализованного конформного пространства. Чтобы построить нормализацию этого пространства, нужно отнести всякой его точке другую его же точку, т. е. задать произвольное дифференцируемое точечное соответствие. Всякую конформно-эвклидову связность Вейля можно рассматривать как внутреннюю связность такого соответствия. Если оно сводится к инверсии относительно неподвижной сферы, то внутренняя связность совпадает со связностью риманова пространства постоянной кривизны, и мы приходим таким образом к конформной интерпретации Пуанкаре. В более общем случае можно предположить, что каждой точке конформного пространства сопоставляется ее инверсия относительно сферы, принадлежащей некоторому семейству. Если это семейство является связкой, зависящей от k параметров, то внутренняя связность есть связность такого риманова пространства, которое является $n-k$ раз проективным. При $k=1$ она совпадает со связностью субпроективного пространства Кагана.

Теория подчиненных нормализаций, примененная к конформному пространству, позволяет изложить конформную теорию поверхностей как частный случай общей теории нормализаций и ввести понятие внутренней геометрии поверхности конформного пространства. Теория конформной наложимости как соответствия, сохраняющего эту связность, была построена В. И. Ведерниковым.

Связность пространства Вейля будет внутренней для поверхности P_3, если за нормали первого и второго рода приняты ось и ребро Грина некоторой сети этой поверхности. Если пара нормализующих конгруенций расслояема в направлении нормали второго рода, то внутренняя связность будет квазиэвклидовой, т. е. допускает абсолютный параллелизм направлений. Частный случай последней нормализации дают нормали, выбранные так, что обе они принадлежат одной и той же линейной конгруенции. Приняв оси этой конгруенции за асболютные прямые биаксиального пространства, можно построить теорию поверхностей этого пространства как частный случай общей теории нормализаций. Рассмотрение внутренней геометрии поверхности биаксиального пространства, естественно, приводит к определению основных понятий биаксиальной геометрии: биаксиального, циклического угла, псевдопараллелизма прямых и т. д. Среди поверхностей выделяется класс так называемых поверхностей нулевой кривизны, внутренняя геометрия которых—эвклидова. Биаксиальное пространство допускает отображение на аффинную комплексную плоскость, при котором биаксиальным движениям соответствуют центроаффинные преобразования, а аналитические кривые плоскости изображаются поверхностями нулевой кривизны. Группа биаксиальных движений изучалась Г. С. Бархиным, теория кривых биаксиального пространства и ее связь с конформной теорией кривых—В. Д. Третьяковым, теория конгруенций и ее связь с теорией сферических конгруенций пространства Лобачевского — Р. Г. Бухараевым. И. В. Зуев использовал теорию поверхностей биаксиального пространства для действительной интерпретации кривых комплексной аффинной, эквиаффинной и центроаффинной плоскости.

А. П. Широков исследовал внутренние геометрии поверхностей бипланарного пространства, которое является многомерным обобщением биаксиального. Классы аффинных связностей, определившихся при этом, допускают отображение на комплексные и унитарные пространства вдвое меньшего числа измерений. Исследуя эти связности, А. П. Широков установил связь между пространствами Келера, расслоенными пространствами Рашевского и A-пространствами П. А. Широкова, который первый пришел к ним еще в 1925 г.

Подгруппа аффинных преобразований четырехмерного пространства, сохраняющих угловую метрику биаксиального типа, определяет геометрию биаффинного пространства $Б_4$. Это пространство допускает такое взаимно однозначное отображение на комплексную аффинную плоскость A_2, при котором группе биаффинных преобразований соответствует группа аффинных преобразований A_2. Общее дифференцируемое отображение $Б_4$ на себя, сохраняющее его угловую метрику, соответствует такому отображению A_2, которое осуществляется с помощью двух аналитических функций двух комплексных аргументов.

Естественная нормализация двумерных поверхностей, которая определяется в $Б_4$, позволяет построить их теорию как частный случай общей теории нормализаций. Внутренняя связность будет при этом средней связностью двух эвклидово-аффинных и содержит как частный случай всякую риманову связность двух измерений. Биаффинная теория поверхностей эквивалентна теории точечных конгруенций комплексной аффинной плоскости и теории дифференцируемых отображений двух таких плоскостей.

Биаффинная геометрия может быть использована для истолкования спиноров пространства Лоренца и классификации типов тензора кривизны в римановых пространствах с локально-лоренцевой метрикой.

П. К. Рашевский (*Москва*). **Теория однородных пространств.** В докладе дается обзор выполненных за последние годы советских работ в области главным образом дифференциально-геометрического исследования однородных пространств.

1. Изучение римановых пространств и пространств аффинной связности с точки зрения допускаемой ими группы движений (И. П. Егоров, Г. И. Кручкович).

2. Изучение римановых пространств с точки зрения допускаемой ими проективной группы (группы геодезических преобразований) (А. С. Солодовников).

3. Исследования по симметрическим пространствам (Б. А. Розенфельд, А. С. Феденко).

4. Аффинно-однородные пространства, т. е. однородные пространства, допускающие инвариантное внесение в них аффинной связности.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ

П. С. Новиков (*Москва*). **О неразрешимости некоторых проблем алгебры.** I. Современное определение понятия «алгоритма» и его роль в алгоритмических вопросах математики. Формализация схем машин по Тьюрингу в форме необратимых преобразований.

II. Основные результаты Е. Поста и А. А. Маркова для ассоциативных систем. Приведем главнейшие из этих результатов.

1) Не существует алгоритма для определения эквивалентности слов в ассоциативных системах с конечным числом образующих и определяющих соотношений (Е. Пост, А. А. Марков).

2) Пусть И—произвольное инвариантное свойство ассоциативной системы с конечным числом образующих и определяющих соотношений; если существуют две ассоциативные системы указанного типа, для одной из которых свойство И не выполняется, а для другой выполняется, то для ассоциативных систем с достаточно большим числом букв проблема распознавания выполнимости свойства И неразрешима (А. А. Марков).

III. Два пути в развитии методов установления неразрешимости алгоритмических проблем. Начало одного из них заключается в работах Поста. Значение метода Поста при переходе от необратимых преобразований к обратимым.

IV. Результат Тьюринга для полугрупп (с сокращениями): существует полугруппа (с сокращениями) с конечным числом образующих и определяющих соотношений, для которой не существует алгоритма, решающего проблему тождеств слов в этой полугруппе.

V. Результаты П. С. Новикова.

1) Теорема, из которой следует неразрешимость проблемы тождества слов для групп. Теорема гласит, что для всякой полугруппы $\mathfrak{A}$ существует взаимно однозначное отображение Φ этой полугруппы $\mathfrak{A}$ в некоторую группу $\mathfrak{A}^*$, причем имеется алгоритм, который по каждому слову, представляющему какой-либо элемент a полугруппы $\mathfrak{A}$, строит слово, представляющее элемент $\Phi(a) \in \mathfrak{A}^*$.

2) Построены группы с неразрешимой проблемой сопряженности и, как следствие, доказано существование двумерного полиэдра с неразрешимой проблемой гомотопии замкнутых путей.

3) Неразрешимость проблемы изоморфизма в теории групп.

VI. Результат Г. С. Цейтина о построении весьма простой ассоциативной системы. Этот результат дает возможность значительно уменьшить число образующих и определяющих соотношений как для группы с неразрешимой проблемой тождества, так и для группы с неразрешимой проблемой сопряженности.

VII. Работа С. И. Адяна. Основной результат С. И. Адяна представляет собой аналог формулированной ранее теоремы А. А. Маркова о распознавании свойств для ассоциативных систем. С. И. Адян определяет понятие наследственного и нетривиального свойства группы и доказывает, что не существует алгоритма, распознающего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений выполнимость свойства К, представляющего собой конъюнкцию нетривиального и наследственного свойства и инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие свойством К. Из этой теоремы следует неразрешимость большого класса алгоритмических проблем алгебры, включающего главные проблемы теории групп.

Другой результат С. И. Адяна касается полугрупп с сокращениями. Для каждой полугруппы $\mathfrak{A}$ можно поставить массовую проблему, состоящую в распознавании по каждому слову, имеет ли элемент из $\mathfrak{A}$, представленный этим словом, обратный элемент. С. И. Адян доказал (хотя и не эффективно), что для каждой полугруппы с конечным числом образующих и определяющих соотношений существует алгоритм, решающий указанную проблему. Вместе с тем, как показал С. И. Адян, не существует алгоритма, решающего эту проблему для всех полугрупп с конечным числом образующих и определяющих соотношений.

VIII. Большое значение для рассматриваемого направления имеет проблема сводимости, поставленная Постом. Эта проблема решена недавно А. А. Мучником, который показал, что существует бесконечное число степеней неразрешимости рекурсивно-перечисленных множеств.

IX. Значение описываемого направления для алгоритмических вопросов математики.

В. А. Успенский (*Москва*). **Об алгоритмической сводимости.** 1. Терминология. Через N^s обозначается совокупность всех кортежей длины s. Всякое множество $M \subseteq N^s$ называется арифметическим, всякий предикат, определенный на N^s, называется арифметическим. Множество, на котором предикат K истинен, обозначается через $K^{(и)}$, множество, на котором он ложен, — через $K^{(л)}$. Функции, определенные на арифметических множествах и принимающие натуральные значения, называются арифметическими. Арифметическая функция называется всюду определенной, если ее область определения есть N^s. Пусть $M \subseteq N^s$; говорят, что функция f: а) характеристическая для M, если $f(m)=1$ при $m \in N$ и $f(m)=0$ при $m \in N^s \setminus M$; б) собственная для M, если $f(m)=1$ при $m \in M$ и f не определена вне M; в) порождает M, если множество значений f есть M. Характеристической функцией предиката K называется характеристическая функция множества $K^{(и)}$. Графиком арифметической функции f, определенной на $M \subseteq N^s$, называется множество всех таких точек $(x_1, \ldots, x_s, y) \in N^{s+1}$, что $f(x_1, \ldots, x_s)=y$. Под разрешимыми множествами и предикатами понимаются рекурсивные множества и предикаты, под перечислимыми множествами — рекурсивно-перечислимые, под вычислимыми функциями — частично-рекурсивные. Семейство всюду определенных арифметических функций называется алгоритмически разрешимым, если оно содержит вычислимую функцию.

2. Виды алгоритмической сводимости. *Алгоритмическая сводимость функций* (*сводимость по вычислимости*). Определение сводимости по вычислимости принадлежит С. Клини [2]. Говорят, что арифметическая функция φ сводится по вычислимости к арифметическим функциям $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если существует такой частично-рекурсивный оператор $\mathbf{F}$ (см. [5]), что $\mathbf{F}(\psi_1, \ldots, \psi_l)=\varphi$.

Алгоритмическая сводимость предикатов (*сводимость по разрешимости*). Определение сводимости по разрешимости принадлежит Е. Посту [3]. Говорят, что арифметический предикат (или арифметическое множество) P сводится по разрешимости к арифметическим предикатам (или арифметическим множествам) $Q_1, \ldots, Q_l$, если характеристическая функция предиката (множества) P сводится по вычислимости к характеристическим функциям предикатов (множеств) $Q_1, \ldots, Q_l$.

Алгоритмическая сводимость множеств (*сводимость по перечислимости*). Определение сводимости по перечислимости принадлежит В. А. Успенскому [9]. Говорят, что арифметическое множество R сводится по перечислимости к арифметическим множествам $S_1, \ldots, S_l$, если существует такая вычислимая операция $\mathbf{U}$ (см.[9]), что $\mathbf{U}(S_1, \ldots, S_l)=R$.

Алгоритмическая сводимость семейств функций. Определение алгоритмической сводимости семейств всюду определенных арифметических функций принадлежит Ю. Т. Медведеву [10]. Пусть $A, B_1, \ldots, B_l$ — семейства всюду определенных арифметических функций; говорят, что A алгоритмически сводится к $B_1, \ldots, B_l$, если существует такой частично-рекурсивный оператор $\mathbf{F}$, что всякий раз, как $g_1 \in B_1, \ldots, g_l \in B_l$, функция $f = \mathbf{F}(g_1, \ldots, g_l)$ принадлежит семейству A.

Определение сводимости по разрешимости было дано в терминах сводимости по вычислимости. Сводимость по вычислимости можно, далее, определить через сводимость по перечислимости: именно, функция φ тогда и только тогда сводится по вычислимости к функциям $\psi_1, \ldots, \psi_l$, когда график функции φ сводится по перечислимости к графикам функции $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Тем самым через сводимость по перечислимости выражена и сводимость по разрешимости; можно и непосредственно определить сводимость по разрешимости в терминах сводимость по перечислимости: предикат P тогда и только тогда сводится по разрешимости к предикатам $Q_1, \ldots, Q_l$, когда каждое из множеств $P_1^{(\text{и})}$ и $P_1^{(\text{л})}$ сводится по перечислимости к множествам $Q_1^{(\text{и})}, Q_1^{(\text{л})}, \ldots, Q_l^{(\text{и})}, Q_l^{(\text{л})}$. В свою очередь сводимость по перечислимости можно выразить через сводимость по вычислимости: множество R тогда и только тогда сводится по перечислимости к множествам $S_1, \ldots, S_l$ когда собственная функция множества R сводится по вычислимости к собственным функциям множеств $S_1, \ldots, S_l$.

Наконец, сводимости по разрешимости и по перечислимости (а значит, и по вычислимости) можно определить при помощи алгоритмической сводимости семейств функций. Каждому арифметическому предикату (множеству) K поставим в соответствие семейство $\mathfrak{R}(K)$, состоящее из одной единственной функции — характеристической функции предиката (множества) K. Предикат (множество) P тогда и только тогда сводится по разрешимости к предикатам (множествам) $Q_1, \ldots, Q_l$, когда семейство $\mathfrak{R}(P)$ алгоритмически сводится к семействам $\mathfrak{R}(Q_1), \ldots, \mathfrak{R}(Q_l)$. Что касается сводимости по перечислимости, то достаточно определить сводимость множеств натуральных чисел. Каждому множеству натуральных чисел K поставим в соответствие семейство $\mathfrak{P}(K)$ всех всюду определенных арифметических функций, порождающих K. Непустое множество натуральных чисел R тогда и только тогда сводится по перечислимости к непустым множествам натуральных чисел $S_1, \ldots, S_l$, когда семейство $\mathfrak{P}(R)$ алгоритмически сводится к семействам $\mathfrak{P}(S_1), \ldots, \mathfrak{P}(S_l)$.

3. Проблема сводимости Поста. Среди перечислимых множеств (или предикатов с перечислимыми множествами истинности) существует такое множество (предикат), к которому каждое из рассматриваемых множеств (предикатов) сводится по разрешимости. Пост [3] поставил проблему, часто называемую проблемой сводимости: доказать или опровергнуть, что всякие два неразрешимых перечислимых множества (неразрешимые предикаты с перечислимыми множествами истинности) сводятся по разрешимости друг к другу. Проблему Поста (согласно [9]) можно сформулировать и так: доказать или опровергнуть, что всякие два множества, каждое из которых нерекурсивно и является дополнением к перечислимому, сводятся по перечислимости друг к другу. Проблему Поста решил недавно А. А. Мучник, построивший для каждого перечислимого неразрешимого множества G такое перечислимое неразрешимое множество H, к которому G не сводится по разрешимости.

4. Степени невычислимости, степени неразрешимости, степени неперечислимости, степени трудности. Каждое из определенных в п. 2 отношений сводимости порождает свое отношение эквивалентности: $a \sim b$ означает, что a сводится (в соответствующем смысле) к b и b сводится к a. Совокупность всех арифметических функций (соответственно, всех арифметических предикатов, всех арифметических множеств, всех семейств всюду определенных арифметических функций) разбивается на классы попарно эквивалентных функций (соответственно, предикатов, множеств, семейств функций). Каждый такой класс называется степенью невычислимости (соответственно, степенью неразрешимости, степенью неперечислимости, степенью трудности). Про объект (функцию, предикат, множество, семейство функций), принадлежащий классу $\mathbf{a}$, говорят, что его степень (невычислимости, неразрешимости, неперечислимости, трудности) равна $\mathbf{a}$. Множество всех степеней невычислимости обозначается через Υ, множество всех степеней неразре-

шимости — через P, множество всех степеней неперечислимости — через П, множество всех степеней трудности — через Ω.

Проблема Поста допускает следующую формулировку: доказать или опровергнуть, что все предикаты с перечислимыми и неразрешимыми множествами истинности имеют одну и ту же степень неразрешимости. А. А. Мучник построил бесконечное множество различных степеней неразрешимости, присущих предикатам указанного вида (подробнее см. резюме доклада А. А. Мучника на этом съезде).

В каждом из множеств Υ, P, П, Ω вводится частичный порядок по следующему правилу: $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$ означает, что какой-нибудь (а значит, и всякий) объект, имеющий степень $\mathbf{a}$, сводится в соответствующем смысле к какому-нибудь (а значит, и ко всякому) объекту, имеющему степень $\mathbf{b}$. Частично упорядоченное множество P было введено и изучено Клини и Постом [8], а частично упорядоченное множество Ω — Ю. Т. Медведевым [10]. Каждое из частично упорядоченных множеств Υ, P, П, Ω обладает наименьшим элементом (таковым будет степень невычислимости вычислимых функций в случае Υ, степень неразрешимости разрешимых предикатов в случае P, степень неперечислимости перечислимых множеств в случае П, степень трудности алгоритмически разрешимых семейств в случае Ω) и является верхней полуструктурой (это означает, что любые два элемента имеют наименьшую верхнюю грань). Полуструктуры Υ, P, П имеют мощность $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ и не содержат максимальных элементов. Полуструктура Ω имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$ и содержит наибольший элемент (а именно, степень трудности пустого семейства функций). Полуструктура P, как показали Клини и Пост, не является структурой. Полуструктура Ω, как показал Ю. Т. Медведев, является структурой и даже брауэровой логикой (по поводу терминологии см [4]). Поскольку всякий сегмент $0 \leqslant x \leqslant e$ брауэровой логики есть снова брауэрова логика, то, согласно [4], всякий сегмент структуры Ω можно рассматривать как интерпретацию конструктивной логики высказываний.

Если две функции имеют одну и ту же степень невычислимости, то их графики имеют одну и ту же степень неперечислимости; тем самым устанавливается отображение Υ в П. Это отображение оказывается, во-первых, отображением на П и, во-вторых, взаимно-однозначным (произвольной степени неперечислимости $\mathbf{p} \in П$ соответствует при этом степень невычислимости, присущая собственной функции какого-либо множества, имеющего степень неперечислимости, равную $\mathbf{p}$). Полученное взаимно-однозначное соответствие между Υ и П оказывается изоморфизмом.

Выделим в Υ подмножество Υ′, отнеся к Υ′ всякую степень невычислимости, присущую какой-либо всюду определенной функции. Подмножество Υ′ конфинально множеству Υ, но не совпадает с ним. Для всякой степени невычислимости $\mathbf{v} \in Υ'$ найдется обладающая ею характеристическая функция; если два предиката имеют одну и ту же степень неразрешимости, то их характеристические функции имеют одну и ту же степень невычислимости. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между P и Υ′; это соответствие оказывается изоморфизмом.

Если два непустых множества натуральных чисел K и L имеют одну и ту же степень неперечислимости, то соответствующие им (см. п. 2) семейства $\mathfrak{P}(K)$ и $\mathfrak{P}(L)$ имеют одну и ту же степень трудности. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством П и некоторым подмножеством $П_Ω \subset Ω$ (поскольку для каждой степени неперечислимости найдется обладающее ею непустое множество натуральных чисел). Полученное соответствие оказывается изоморфизмом.

Цепочка изоморфизмов и включений $P \simeq Υ' \subset Υ \simeq П \simeq П_Ω$ индуцирует изоморфизм $P \simeq P_Ω$, где $P_Ω \subset П_Ω$. При последнем изоморфизме каждой степени неразрешимости $\mathbf{r} \in P$ соответствует степень трудности семейства $\mathfrak{R}(R)$, где R — произвольный предикат, имеющий степень неразрешимости, равную $\mathbf{r}$.

Если отождествить множества P, Υ′, $P_Ω$ и отождествить множества П, Υ, $П_Ω$, то можно считать, что P и П вложены в Ω, т. е. $P \subset П \subset Ω$.

5. Сводимость проблем. Под «проблемой» будем понимать проблему построения объекта, удовлетворяющего каким-либо условиям; всякий такой объект называется решением проблемы. Проблемы, обладающие решениями, называются

разрешимыми. Проблема сведения проблемы A к проблеме B есть проблема построения способа, позволяющего из всякого решения проблемы B получить решение проблемы A; говорят, что A сводится к B, если проблема сведения A к B разрешима. Как показал А. Н. Колмогоров [1], проблемы—при надлежаще введенных операциях—образуют интерпретацию конструктивного исчисления высказываний.

Возможны различные уточнения понятия «проблема». Одно из них состоит в том, что в качестве проблем рассматриваются лишь конструктивные проблемы, т. е. проблемы построения тех или иных конструктивных объектов (чисел, слов и т. д.). Всякая алгоритмическая проблема (проблема построения алгоритма) является конструктивной, если ее понимать как проблему построения программы алгоритма. Проблема сведения проблемы A к проблеме B понимается как проблема построения алгоритма, перерабатывающего всякое решение проблемы B в решение проблемы A. Важный класс конструктивных проблем был изучен Клини и Нельсоном (см. [5]).

Разрешающей функцией серии $\{A_n\}$ конструктивных проблем назовем функцию, дающую по номеру проблемы гёделевский номер ее решения. Всякой серии конструктивных проблем отвечает, согласно А. А. Маркову [7], массовая проблема—проблема построения алгоритма, вычисляющего разрешающую функцию данной серии. Всякая массовая проблема является алгоритмической и, следовательно, конструктивной. Можно определить алгоритмическую сводимость одной серии конструктивных проблем $\{A_n\}$ к другой серии $\{B_n\}$ как сводимость по вычислимости разрешающей функции серии $\{A_n\}$ к разрешающей функции серии $\{B_n\}$ (см. [6]).

Другое уточнение понятия проблемы предложил Ю. Т. Медведев [10], рассмотревший проблемы следующего вида: «построить функцию, принадлежащую данному семейству всюду определенных арифметических функций». Проблема сведения двух таких проблем определяется как проблема такого же вида. Проблема называется алгоритмически разрешимой, если таковой является определяющее ее семейство функций. Алгоритмическая разрешимость проблемы сведения A к B равносильна тому, что семейство, определяющее проблему A, алгоритмически сводится к семейству, определяющему проблему B.

Лит.: 1. Колмогоров А. Н., Math. Zeitschr., **35**, (1932), 58. 2. Kleene S. C., Trans. Am. Math. Soc., **53**, (1943), 41. 3. Post E. L., Bull. Am. Math. Soc., **50**, (1944), 284. 4. Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952. 5. Kleene S. C., introduction to metamathematics, 1952. 6. Успенский В. А. Усп. матем. наук, **8**, № 4, (1953), 176. 7. Марков А. А., Теория алгорифмов, М.—Л., 1954. 8. Kleene S. C., Post E. L., Ann. Math., **59**, (1954), 379. 9. Успенский В. А., ДАН СССР, **103**, № 5, (1955). 10. Медведев Ю. Т., ДАН СССР, **104**, № 4, (1955).

Н. А. Шанин (*Ленинград*). **О конструктивном математическом анализе.** 1. В конструктивном математическом анализе в качестве объектов изучения фигурируют только конструктивные объекты, представляющие собой слова в некоторых алфавитах или по крайней мере допускающие задание (кодификацию) посредством слов в некоторых алфавитах. Конструктивными математическими объектами являются, например, натуральные числа, рациональные числа, матрицы с рациональными элементами, рекурсивные функции, нормальные алгорифмы.

При рассмотрении конструктивных объектов допускается абстракция потенциальной осуществимости (см. [1]), но не допускается абстракция актуальной бесконечности. Специфика изучаемых объектов обусловливает особое конструктивное понимание суждений. В частности, суждение о существовании конструктивного объекта, удовлетворяющего некоторому условию U, понимается как суждение о потенциальной осуществимости конструктивного объекта, удовлетворяющего условию U.

2. В классическом математическом анализе переход от рациональных чисел к вещественным числам осуществляется посредством абстракции актуальной бесконечности и основанной на этой абстракции теории множеств.

В начале текущего столетия Л. Брауэр и Г. Вейль подвергли критике теоретико-множественную основу классического математического анализа и предложили осуществить переход от рациональных чисел к вещественным посредством идеи свободно становящейся последовательности. Они предприняли попытку построения так называемого интуиционистского математического анализа на основе этой идеи.

Идея свободно становящейся последовательности неприемлема, и опыт Л. Брауэра и Г. Вейля не привел к удовлетворительной математической теории.

3. В 30-х годах текущего столетия в математике было выработано точное понятие вычислимой арифметической функции (арифметического алгорифма). Это достижение позволило осуществить переход от рациональных чисел к вещественным числам без привлечения абстракции актуальной бесконечности или идеи свободно становящейся последовательности. Тьюринг [2] и Шпеккер [3] положили начало теории конструктивных вещественных чисел. Вещественные числа конструктивного математического анализа являются конструктивными объектами. Имеются существенные различия между теорией вещественных чисел конструктивного анализа и теорией вещественных чисел классического анализа.

Гудстейн [4], основываясь на понятии арифметического алгорифма, ввел своеобразное понятие конструктивной равномерно непрерывной функции и разработал для своих функций дифференциальное исчисление.

4. Понятие конструктивной функции вещественного аргумента, соответствующее теоретико-множественному понятию отображения одного множества в другое, введено А. А. Марковым. Им доказана теорема о невозможности конструктивного разрыва у конструктивной функции (см. [5]).

5. Теорема А. А. Маркова выдвинула вопрос о возможности определения конструктивных объектов, соответствующих измеримым и суммируемым функциям классического анализа. Н. А. Шанин использовал для определения таких конструктивных объектов идею пополнения метрических и нормированных пространств. Вводится понятие конструктивного метрического пространства. Алгорифмически задаваемые последовательности точек конструктивного метрического пространства, удовлетворяющие условию Коши (это условие получает формулировку в терминах теории алгорифмов), называются конструктами. Вводятся в рассмотрение измеримые конструкты, соответствующие измеримым функциям, и p-суммируемые конструкты ($p>0$), соответствующие функциям, суммируемым с p-й степенью. Конструктам, вообще говоря, не приписываются значения в отдельных точках и они не являются конструктивными функциями в смысле А. А. Маркова, но p-суммируемый конструкт при $p\geqslant 1$ на любом промежутке имеет среднее интегральное значение, выражаемое конструктивным вещественным числом. Между теорией измеримых и p-суммируемых конструктов и соответствующими теориями классической математики имеются значительные различия (особенно в свойствах интеграла Лебега). Изучались также конструкты, соответствующие измеримым по Лебегу множествам конечной меры, абсолютно непрерывные конструкты, обобщенно-дифференцируемые конструкты (соответствующие функциям, имеющим обобщенные производные заданного порядка в смысле С. Л. Соболева) и конструкты других типов. Разрабатывается теория конструктивных нормированных пространств.

Удобный технический аппарат для теории конструктов дает теория нормальных алгорифмов, разработанная А. А. Марковым [1].

6. Теория конструктивных вещественных функций вещественного аргумента интенсивно разрабатывалась ленинградскими математиками Г. С. Цейтиным и И. Д. Заславским (формулировки основных результатов приведены в резюме докладов Г. С. Цейтина и И. Д. Заславского на этом съезде). Она обладает рядом коренных отличий от теории функций вещественного аргумента в классическом математическом анализе. В этом отношении особенно показательны следующие результаты:

а) всякая конструктивная функция вещественного аргумента непрерывна в каждой точке, в которой она определена (Г. С. Цейтин);

б) в замкнутом промежутке [0,1] можно построить конструктивную функцию, которая не является равномерно непрерывной (И. Д. Заславский).

7. Появление конструктивного математического анализа, наряду с классическим, выдвигает вопрос о том, какой из этих двух анализов обладает бо́льшими преимуществами в качестве математического аппарата естествознания и техники. В настоящее время такое сравнение преждевременно.

Лит.: 1. Марков А. А., Труды Матем. ин-та, им. В. А. Стеклова, 42, 1954. 2. Turing A. M., Proc. Lond. Math. Soc., v. 42, (1937), 230—265; A correction, v. 43, (1937), 544—546. 3. Specker E., Symb. Logic, v. 14, № 3, (1949), 145—158. 4. Goodstein R. L., Proc. Lond. Math. Soc., v. 52, № 2, (1950), 81—106. 5. Марков А. А., Усп. матем. наук, 9, (61), № 3, (1954), 226—230.

С. В. Яблонский (*Москва*). **Функциональные построения в многозначных логиках.** При рассмотрении некоторых вопросов в логике возникают два подхода: дедуктивный и функциональный. Многие фундаментальные факты (полнота, непротиворечивость, независимость и пр.) опираются на связи, существующие между этими двумя аспектами. Это явилось одним из источников, стимулировавшим изучение функциональных систем, связанных с логическими исчислениями. Другим фактором, требующим разработки функционального аппарата, служат запросы техники, использующей дискретные принципы. В настоящем докладе делается попытка обзора исследований по функциональным построениям в k-значной логике $(2 \leqslant k < \aleph_0)$.

Исходным объектом в этих рассмотрениях являются функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые вместе со своими аргументами принимают значения из множества $E^k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Система P_k всех таких функций наиболее полно изучена для случаев $k = 2, 3$. Еще Постом отмечалось, что системы P_k при $k > 2$ могут быть проинтерпретированы в системе P_2. Однако наличие такой редукции не уменьшает интереса в непосредственном изучении систем $P_k\,(k > 2)$. В этом смысле системы $P_k\,(k > 2)$ занимают такое же положение по отношению к системе P_2, как k-мерное пространство к двумерному.

Для задания функций обычно используют таблицы. Однако в силу сильного усложнения таблиц с ростом n такой способ задания оказывается мало эффективным. В связи с этим возникает задача отыскания более простых и удобных форм заданий функций, например, с помощью модели n-мерной решетки или с помощью таблицы с двумя входами.

К числу возможных форм задания функций из P_k относится способ задания посредством формул, построенных (путем суперпозиций) из «элементарных функций». Понятие суперпозиции функций из данного множества $\mathcal{F}$ «элементарных функций» из P_k определяется индуктивно.

1. Каждая функция из $\mathcal{F}$ является суперпозицией функции из $\mathcal{F}$.

2. Если $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть суперпозиция функций из $\mathcal{F}$ и $\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n} \end{pmatrix}$ — произвольная подстановка переменных (y_{i_s} не обязательно различны), то $g(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})$ — суперпозиция функций системы $\mathcal{F}$.

3. Если $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — суперпозиция функций системы $\mathcal{F}$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n$ таковы, что для каждого i либо g_i есть суперпозиция функций системы $\mathcal{F}$ либо $g_i \equiv x_i$, то $g(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — суперпозиция функций системы $\mathcal{F}$.

С понятием суперпозиции тесно связано понятие замкнутого класса: класс $\mathfrak{M}$ функций из P_k называется функционально замкнутым, если операция суперпозиции, примененная к системам функций из этого класса, не выводит за пределы этого класса. Как было отмечено Постом, из замкнутых классов функций, принадлежащих P_k, можно построить структуру. Эта структура полностью изучена им для случая $k = 2$. Им установлено, в частности, что эта структура имеет только счетное число элементов. Что касается общего случая, то остается невыясненным, какова мощность множества всех замкнутых классов из P_k. Следует, повидимому, отказаться от попытки дать полное описание замкнутых классов в P_k при $k > 2$. Однако в некоторых рассмотрениях необходимо знание особенностей определенных замкнутых классов. Примерами таких классов служат:

а) класс $T_{E,0}$ функций, сохраняющих подмножество $E \subset E^k$, т. е. таких функций f, что $f(E, E, \ldots, E) \subset E$;

а) класс $U_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e}$ функций, сохраняющих разбиение

$$D: E^k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_e \quad (\varepsilon_i \cap \varepsilon_j = 0, \quad i \neq j \text{ и } 1 < e < k),$$

т. е. таких функций f, что для любых подмножеств $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_n}$ найдется подмножество ε_i, для которого $f(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_n}) \subset \varepsilon_i$.

Интересно, что свойства замкнутых классов нередко связаны с теоретико-множественными, алгебраическими, теоретико-числовыми и прочими закономерностями.

Возможность представления произвольной функции из P_k посредством формулы, построенной из функций некоторой системы $\mathcal{F}$, зависит от свойств этой системы. Именно, система функции $\mathcal{F}$ называется полной в P_k (в $\mathfrak{M}$), если из нее путем суперпозиций может быть получена любая функция из P_k (из $\mathfrak{M}$). Известен целый ряд полных систем:

а) $\mathcal{F} = \{\min(x, y),\ x+1 \pmod k\}$ (Пост),

б) $\mathcal{F} = \{\min(x, y)+1 \pmod k\}$ (Вебб),

в) $\mathcal{F} = \{1-x \pmod k,\ \min(k-1,\ y-x+k-1)\}$ при $k>2$ (Лукасевич-Слупецкий) и др.

Вообще возникает задача дать необходимые и достаточные условия для полноты системы функции $\mathcal{F}$ и P_k (в $\mathfrak{M}$). Из факта существования конечных полных в P_k систем базиса вытекают следующие результаты.

Теорема. Из всякой полной в P_k системы можно выделить конечную полную подсистему.

Теорема (А. В. Кузнецов). Для каждого P_k можно эффективно построить такую систему замкнутых классов $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_s$, что система $\mathcal{F}$ функций из P_k является полной тогда и только тогда, когда она не включена ни в один из классов $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_s$.

Хотя построение классов в последней теореме и эффективно, но оно сопряжено с большими техническими трудностями. Теорема не дает практического эффекта даже для небольших k, ибо приводит к слишком обширной системе классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$. Этим самым она является скорее теоремой существования и не снимает решения задачи о полноте. Дальнейшие уточнения этой теоремы связаны с максимальным сокращением системы $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$. Они требуют значительной информации о системе P_k, поэтому получены лишь для отдельных значений k (для $k=2$) — Постом, для $k=3$ — докладчиком. Однако, как правило, при этом удается получить более сильный результат, именно: для $k=2$ из каждой полной системы можно выделить полную подсистему, состоящую не более чем из четырех функций, для $k=3$ — из семи функций. Последний результат не является окончательным, так как известна полная система, содержащая только шесть функций и не содержащая собственных полных подсистем: $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, \min(x, y), \Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)\}$, где

$\Phi(x, y)$:

x^y	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\Psi(x, y)$:

x^y	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

Известный интерес представляют достаточные критерии полноты.

Теорема (Слупецкий). Система, которая содержит все функции одного переменного из P_k и функцию $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k$, существенно зависящую от $n>1$ переменных и принимающую k значений, полна в P_k $(k>2)$.

Теорема (Мартин). Функция $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k$ является функцией Шеффера тогда и только тогда, когда она порождает все функции одного переменного.

Аналогичные вопросы возникают в связи с полными в $\mathfrak{M}$ (где $\mathfrak{M}$ — замкнутый в P_k класс) системами функций. Здесь особенно важным является следующий вопрос: всякий ли замкнутый класс имеет конечный базис? Этот вопрос положительно решен Постом для случая $k=2$.

Многие рассмотрения могут быть облегчены, если опираться на понятие гомоморфизма систем функций.

Система $\mathfrak{P}$ функций f гомоморфно отображена в систему $\mathfrak{Q}$ функций g, если каждому символу x_α взаимнооднозначно соответствует символ y_α и каждой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{P}$ отвечает одна и только одна функция $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathfrak{Q}$ и при этом выполнены следующие условия:

1) если функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{P}$ отвечает функция $g(y_1, y_2, \ldots y_n) \in \mathfrak{Q}$, то функции $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ из $\mathfrak{P}$ соответствует функция $g(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}) \in \mathfrak{Q}$, и

2) если функциям $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_{11}, \ldots, x_{1m_1}), \ldots, f_n(x_{n1}, \ldots, x_{nm_n})$ соответствуют функции $g(y_1, \ldots, y_n)$, $g_1(y_{11}, \ldots, y_{1m_1}), \ldots, g_n(y_{n1}, \ldots, y_{nm_n})$, где $f \in \mathfrak{P}$, f_i либо есть x_i, либо принадлежит $\mathfrak{P}$, $g \in \mathfrak{Q}$ и g_i либо есть y_i, либо принадлежит $\mathfrak{Q}$, и если $f(f_1, \ldots, f_n) \in \mathfrak{P}$, то функции $f(f_1, \ldots, f_n)$ соответствует принадлежащая система $\mathfrak{Q}$ функция $g(g_1, \ldots, g_n)$.

Примерами гомоморфизмов служат:

1. $\mathfrak{P} = \{f(x_1, \ldots, x_n)\}$ и $\mathfrak{Q} = \{g(x_1, \ldots, x_n)\}$, где $g(x_1, \ldots, x_n) = s^{-1}(f(s(x_1), \ldots \ldots, s(x_n)))$ (двойственность относительно подстановки $s(x)$).

2. Пусть $E^l \subset E^k (l \leqslant k)$ и $\mathfrak{P} \equiv T_{E^l, 0} \subset P_k$. Поставим в соответствие функции $f \in \mathfrak{P}$ функцию $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, когда $x_1 \in E^l, \ldots, x_n \in E^l$; $\mathfrak{Q} = P_l$.

3. Пусть $\mathfrak{P} \equiv \overline{U}_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l} \subset P_k$. Положим $\varphi(x) = i$, когда $x \in \varepsilon_i$.

Поставим в соответствие функции $f \in \mathfrak{P}$ функцию g так, что $g(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \varphi(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, где α_i — произвольный прообраз β_1 отображения φ.

Возникает вопрос: какие можно еще указать примеры нетривиальных гомоморфизмов?

Для приложений важно изучение представлений функций из P_k формулами в конкретных базисах. Наиболее полно этот вопрос изучен для $k=2$ и $\mathcal{P} = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$. Здесь возникает задача об отыскании простейших в некотором смысле формул (Шенион, Риордан и др.).

Многозначная логика является удобной для описания функционирования электронных схем. Оказывается, что с помощью ее удается учесть многие особенности элементов, которые с помощью двузначной логики не учитывались (типы усилителей, режимы работ и пр.).

В заключение необходимо отметить, что характерной особенностью многих задач, связанных с многозначной логикой (полнота, простейшие представления в данном базисе, синтез схем и пр.), является следующее обстоятельство: вместе с постановкой задачи тривиально удается найти некоторое решение, однако это решение требует большого перебора в конечной области и этим самым скорее доказывает существование; дальнейшая задача состоит в повышении эффективности алгоритма, т. е. в уменьшении характера перебора до минимума.

СЕКЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

А. П. Ершов (*Москва*), **Э. З. Любимский** (*Москва*), **С. С. Камынин** (*Москва*). **Автоматизация программирования.** 1. Программа есть описание алгорифма решения задачи в терминах машинных операций. Программирование, т. е. переработка исходного алгорифма в программу, является сложным и трудоемким процессом. Это объясняется, с одной стороны, необходимостью значительной детализации отдельных действий при переводе алгорифма на язык машины, с другой — необходимостью существенного преобразования исходного алгорифма и введения в него дополнительных действий, вызванных ограниченными возможностями машины (расширение алгорифма).

Процесс программирования разбивается на два этапа.

Первый этап. Расширение исходного алгорифма, разбиение расширенного алгорифма на более мелкие части и установление связей между ними (составление схемы программы).

Второй этап. Программирование каждой отдельной части расширенного алгорифма и компоновка этих частей. Различные принципы разбиения расширенного алгорифма на части на первом этапе приводят к различным методам программирования.

2. Операторный метод программирования в общих чертах был предложен в 1953 г. А. А. Ляпуновым. А. А. Ляпунов описал основные типы «операторов» частей), на которые разбивается любой расширенный алгорифм, и ввел необходимые понятия. К этим типам относятся: арифметический оператор, логический оператор и оператор переадресации. Таким образом, схема программы в операторном методе программирования есть описание расширенного алгорифма в терминах вышеуказанных операторов.

О характере работы при использовании операторного метода следует заметить, что в то время как составление схемы программы есть существенно неоднозначный процесс с большой степенью ветвимости, второй этап, являясь гораздо более однозначным процессом, значительно превосходит первый этап по трудоемкости.

Программирующие программы (ПП), основанные на операторном методе, полностью автоматизируют второй этап программирования.

3. Исходной информацией для такого рода ПП являются: а) схема программы, указывающая, из каких операторов будет состоять программа, а также относительное расположение операторов в программе и б) информация о каждом отдельном операторе. При этом, в связи с необходимостью числовой кодировки всего материала, вводимого в машину, для обозначения буквенных символов в информации вводятся «условные числа».

Работа ПП начинается с последовательной обработки информации об отдельных операторах и превращения ее в готовые куски программы. Затем производятся компоновка программы, замена условных чисел на истинные адреса в соответствии с заданным или выработанным машиной распределением памяти и выдача готовой программы.

4. Разработка ПП потребовала более точной и детальной классификации допустимых типов операторов. ПП Математического института АН СССР допускает следующие типы операторов, из которых может состоять схема программы:

а) арифметический оператор,

б) логический оператор,

в) оператор переадресации,

г) оператор восстановления,

д) оператор засылки.

ПП Вычислительного центра АН СССР допускает следующие типы операторов:

а) арифметический оператор,

б) логический оператор,

в) цикл.

Кроме того, обе ПП допускают наличие нестандартных операторов.

Принципиально ПП этого типа являются универсальными программами, и ограничения, накладываемые на программируемые задачи, диктуются только соображениями удобства составления исходной информации. ПП допускают возможность включения новых типов операторов.

5. Описываются некоторые типы алгорифмов программирования в ПП: построение программы арифметического оператора, построение команд переадресации. Анализируется опыт эксплоатации ПП.

6. Другим методом программирования, получившим широкое распространение за рубежом, является **метод стандартных подпрограмм**. Он предполагает имеющейся библиотеку стандартных подпрограмм, каждая из которых является программой решения некоторой стандартной задачи. Тогда первый этап программирования заключается в разбиении алгорифма на ряд стандартных задач, для которых уже имеются составленные программы. Автоматизация метода стандартных подпрограмм привела к созданию компилирующих и интерпретирующих программ. При этом автоматизируются ввод подпрограмм в машину, их согласование и объединение. К интерпретирующим программам примыкает метод автоматизации программирования, разработанный Л. В. Канторовичем и его сотрудниками.

Достоинствами метода стандартных подпрограмм являются его простота и неповторяемость работы при решении однотипных задач; недостатками метода являются его неуниверсальность, а также ограничения, накладываемые на логическую структуру задачи, что часто мешает получить наиболее выгодный вариант программы. Остается открытым вопрос автоматизации составления стандартных подпрограмм.

7. Программирующие программы допускают возможность включения метода стандартных подпрограмм в операторный метод.

8. Дальнейшим развитием автоматизации программирования является автоматизация первого этапа процесса программирования. При этом возникают следующие задачи, являющиеся по существу задачами теории алгорифмов.

а) Выработка формальной системы описания исходных алгорифмов. Эта система должна быть такова, чтобы описание алгорифма по возможности не зависело от конкретных особенностей машины. Она должна быть также удобной для записи возможно более широкого класса алгорифмов и практически полной.

б) На основе выработанного понятия исходного алгорифма должна быть создана методика переработки исходного алгорифма в схему программы. Эта переработка должна содержать в себе, во-первых, преобразования исходного алгорифма, превращающие его в расширенный алгорифм, и, во-вторых, некоторый класс допустимых действий, позволяющих производить «эквивалентные» преобразования алгорифма.

в) Поскольку основной задачей является получение наилучшей (с какой-то точки зрения) схемы программы, необходимо разработать формальную систему оценки алгорифмов с точки зрения их «качества». В соответствии с этим должен быть выработан эффективный алгорифм, который для данного исходного алгорифма позволяет найти те допустимые эквивалентные преобразования, которые улучшают его оценки.

9. Разделом автоматизации программирования является также автоматизация контроля программ. Под контролем программы подразумевается решение своего рода «проблемы тождества» исходного алгорифма составленной программе и указание места ошибок в программе. Алгорифм можно рассматривать как с точки зрения характера переработки исходной информации в конечный результат, так и с точки зрения его

структуры. В соответствии с этим «тождество» программы исходному алгорифму может быть установлено либо проверкой правильности переработки информации (1-й способ контроля), либо проверкой правильности структуры программы (2-й способ контроля).

10. 1-й способ контроля предполагает заранее имеющимися верные результаты для некоторой части исходных данных (тест). Контроль заключается в выполнении составленной программы и в сличении получающихся результатов с данными теста. Процесс выполнения программы и сличения результатов может быть автоматизирован (программы контроля). Следующей задачей в этом направлении является построение алгорифма выделения минимальной части исходных данных, проверка результатов для которых даст гарантию правильной переработки всей исходной информации (автоматизация построения теста).

11. 2-й способ контроля не требует построения теста и работы по построенной программе, но оставляет открытой задачу непосредственного сличения структуры программы и структуры исходного алгорифма. Автоматизацией 2-го способа является создание программы, строящей по готовой программе сокращенную информацию о ее структуре в форме, возможно более близкой к строению исходного алгорифма.

Ко 2-му способу контроля примыкают программы, автоматически проверяющие соответствие построенной программы формальным ограничениям, накладываемым на структуру программы (программа как некоторый объект в формальной системе с набором правил формирования).

А. И. Китов (*Москва*), **А. А. Ляпунов** (*Москва*), **С. В. Яблонский** (*Москва*), **Полетаев** (*Москва*). **О кибернетике.** I. Кибернетикой называют научное направление, которое математическими методами изучает управляющие системы и процессы управления. Его возникновение вызвано тем, что в последние годы значение управляющих систем в технике сильно возросло. Изучение управляющих систем представляет также большое значение для некоторых областей биологии — в первую очередь для физиологии нервной системы и для теории наследственности.

Процессы управления состоят в восприятии осведомительной информации и выработке управляющей информации. Таким образом, проблематика кибернетики группируется вокруг понятия информации: с одной стороны—это изучение различных способов кодирования информации и ее переработки, с другой—изучение устройств, служащих для переработки информации.

II. Кибернетика далеко еще не сложилась в виде цельной науки, однако можно указать ряд ее ветвей, которые успели получить значительное развитие. 1) Изучение методов синтеза управляющих систем. 2) Изучение методов анализа управляющих систем. Сюда относится, в частности, теория игр или тактик. Эта тематика тесно связана с интересами рефлексологии. 3) Теория информации, которая занимается изучением рациональных способов кодирования информации с точки зрения повышения пропускной способности передающих каналов запоминающих устройств, а также с точки зрения борьбы с помехами. 4) Общие вопросы программирования. Сюда входит разработка логических схем программ, автоматизации программирования, разработка таких методов программирования, при которых эффективность использования машин становится возможно более высокой.

III. С кибернетикой тесно связаны некоторые разделы теории вероятностей—прогноз поведений случайных процессов, статистика процессов и др. С другой стороны, кибернетика соприкасается с математической логикой и теорией алгоритмов. Для ее развития имеют существенное значение разработка общих методов формализации процессов переработки информации, изучение методов синтеза алгоритмов и развитие новой отрасли—теории алгоритмов с оценками.

IV. Задачи кибернетики возникают в связи со стремлением использовать машины как подсобное средство мышления возможно более эффективным способом. Для передачи машине определенной области деятельности человеческого мышления необходимо свести эту область к ряду правил, автоматическое применение которых приводит к требуемому результату. Примерами такой формализации различных областей умственной деятельности человека, помимо вычислений, являются примеры применения машин в качестве диспетчеров на транспорте, для перевода с одного языка на другой, для планирования и выполнения некоторых экономических функций, для управления технологическими процессами, для игры в интеллектуальные игры (например, шахматы) в соответствии с заданной тактикой для моделирования поведения животных.

С. А. Лебедев (*Москва*) и М. Р. Шура-Бура (*Москва*). **Современная вычислительная машина.**

К. А. Семендяев (*Москва*), М. Р. Шура-Бура (*Москва*) и Д. А. Жучков (*Москва*). **Программирование.**

С. Л. Соболев (*Москва*). **Некоторые современные вопросы вычислительной математики.** 1. Предмет численной математики с современной точки зрения. Функциональные множества и функциональные пространства. Таблицы, графики, приближенные формулы, отдельные числовые значения как конечномерные приближения в функциональном пространстве. Как изучаются множества, не сводимые к конечномерным? Конечная ε-сеть в конечномерных пространствах. Компактность как важнейшее свойство всех объектов численной математики.

Численная математика как один из разделов функционального анализа. Новые методы, непосредственно привнесенные функциональным анализом в практику вычислений.

2. Численная математика и дискретные функции дискретного аргумента. Двоичные представления чисел. Двузначные функции многих переменных, принимающих два значения 0,1.

Связь между численной математикой и математической логикой.

Сведения и информация. Проблематика теории информации, связанная с большим количеством сведений. Оценка алгоритмов по их сложности (по числу действий).

3. Математические машины. Универсальные быстродействующие электронные вычислительные машины. Программирование, его теория и практика. Обратное влияние машинной техники на проблематику математических наук в целом.

Математическая логика и ее применение.

Расширение классов разрешимых задач. Появление потребности в решении сложных математических задач одновременно с расширением возможностей решения.

Задачи пространственные и нелинейные.

4. Теория приближений. Новые задачи в теории приближения функций, связанные с использованием функций в вычислениях. Задачи построения алгоритмов наилучшего приближения.

Интерполирование функций многих переменных.

5. Специальные вопросы приближения операторов. Квадратурные формулы и выражения производных через разности для функций многих переменных.

Обратные операторы для приближенных, приближенные—для обратных.

Явный вид некоторых обратных операторов.

6. Задачи Коши для дифференциальных и сеточных уравнений. Задачи, решаемые шагами, их устойчивость, устойчивость счета по различным схемам. Чисто вычислительные эффекты, связанные с округлением счета.

7. Системы большого числа алгебраических уравнений. Пограничные задачи между алгеброй и анализом. Системы большого числа уравнений, соответствующих данному интегральному.

Уравнения эллиптического типа и соответствующие сеточные системы.

Методы анализа в алгебраических уравнениях. Алгоритмизация классического анализа как результат расширения возможностей счета.

8. Заключение.

В. Н. Фаддеева (*Ленинград*). **Вычислительные методы линейной алгебры.**

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

А. А. Дородницын (*Москва*). **Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики.** В докладе излагается метод решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики, когда движение описывается эллиптическими, параболическими уравнениями или уравнениями смешанного типа. Метод основан на замене системы дифференциальных уравнений в частных производных аппроксимирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть в прямоугольной области задана система уравнений

$$\frac{\partial P_i(x, y; u_1, \ldots, u_n)}{\partial x} + \frac{\partial Q_i(x, y; u_1, \ldots, u_n)}{\partial y} = \\ = F_i(x, y; u_1, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad \text{(A)}$$

Разбивая область на N полос и интегрируя систему (А) поперек каждой полосы, получим nN интегральных соотношений. Если к функциям, входящим под знак интеграла, применить какую-либо интерполяционную формулу и выполнить интегрирование, то получится система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой неизвестными величинами будут значения функций $u_1, u_2, \ldots, u_n$ на границах полос. Эта система вместе с граничными условиями позволяет определить искомые величины.

Метод обобщается также на случай, когда граница области является заранее неизвестной, как, например, в задаче обтекания тела сверхзвуковым потоком с отсоединенной ударной волной.

Опыт показал, что метод является удобным при счете на быстродействующих вычислительных машинах. В докладе приводятся примеры решения ряда задач: обтекание эллипсов и эллипсоидов при критической скорости, обтекание цилиндра сверхзвуковым потоком, задача расчета пограничного слоя и др.

И. А. Кибель (*Москва*). **Проблемы прогноза погоды.** На протяжении меньше чем двух столетий наука о прогнозе погоды дважды претерпевала революционные сдвиги. Первый раз — когда трудами матеорологов и математиков в разных частях земного шара было выяснено, как надо преобразовать уравнения механики сплошной среды, чтобы, выделив существенное для формирования атмосферных процессов большого масштаба, получить принципиальную возможность прогноза погоды методами гидродинамики. Второй — когда появление универсальных быстродействующих (электронных) вычислительных машин позволило впервые реализовать эту возможность.

По-разному приходится ставить задачу краткосрочного и долгосрочного прогноза о погоде.

Существенные исследования по краткосрочному прогнозу погоды методами гидродинамики принадлежат в нашей стране Булееву Н. И. и Марчуку Г. И., Садокову В. П., Белоусову С. Л., Быкову В. В. и др.; из зарубежных исследователей должны быть названы Розби, Дж. Нейман, Болин и другие.

При краткосрочном прогнозе, если отвлечься от пограничного планетарного слоя, можно свести задачу к решению следующей системы трех уравнений для определения трех функций: u, v (компоненты скоростей) и Φ (геопотенциал):

$$\frac{du}{dt}-\frac{p^2}{c^2}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+f\cdot v, \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt}-\frac{p^2}{c^2}\frac{\partial v}{\partial p}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}-fu, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p^2}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right]=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

(x, y — горизонтальные координаты, p — давление, f — параметр Кориолиса, $c^2=\mu RT_1$, R — газовая постоянная, T_1 — средняя температура, $\alpha=\frac{(\gamma_a-\gamma)R}{g}$ — «вертикальная устойчивость», g — ускорение силы тяжести, γ — вертикальный температурный градиент, γ_a — адиабатический градиент, $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$). Вертикальная скорость w и температура определяются через u, v, Φ путем простого дифференцирования. Принимаются два краевых условия: обращение в нуль скорости w на поверхности Земли и ограниченность наших величин на пределах атмосферы.

Для линеаризированной системы (1), (2), (3) доказывается, что, каковы бы ни были начальные значения u, v и Φ, движение будет быстро стремиться к геострофическому. Для нелинейной системы движение оказывается всегда близким к геострофическому. Здесь основное уравнение, служащее для прогноза Φ, получается путем разложения по малому параметру $\varepsilon=\frac{1}{f\tau}$ (τ — характерное время), стоящему при старших производных по времени в уравнениях (1) и (2). Производные по времени $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ находятся каждый раз в виде пространственных интегралов от квадратичных комбинаций от производных функции Φ по координатам. Быстродействующие вычислительные машины позволяют затем определить шаг за шагом решение задачи.

В СССР расчеты велись на БЭСМ и на М2; в США использовались *ENIAC* и *IBM* 701; В Швеции — *BESK*.

Гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды развиваются постепенно и непрерывно, становясь все более общими.

В области долгосрочного прогноза погоды методами гидродинамики первые работы принадлежат Е. Н. Блиновой. Ей удалось показать, что, линеаризируя уравнения гидродинамики по отношению к западно-восточному переносу, можно построить приближенное решение, позволяющее предсказать эволюцию полей давления среднего уровня на срок порядка нескольких десятков дней вперед. Развивая эти исследования, Е. Н. Блинова показала, далее, как можно подойти успешно к решению задачи о долгосрочном прогнозе аномалий температуры (установившийся режим в пограничном слое Земли).

В последующих работах Е. Н. Блиновой, С. А. Машковича, Е. М. Добрышмана, А. С. Монина, Я. М. Хейфица, Ш. А. Мусаэляна и других были даны различные обобщения и уточнения гидродинамической методики прогноза, а также расширена область предсказываемых явлений. Возможность использования при решении задач универсальных и специализированных быстродействующих вычислительных машин особенно существенна.

П. Я. Полубаринова-Кочина (*Москва*) **и И. А. Чарный** (*Москва*). **Основные задачи теории фильтрации.** 1. В этом году исполняется столетие закона Дарси, нашедшего широкие применения в теории фильтрации. Для законов, отличающихся от закона Дарси, даны решения лишь отдельных задач. С. А. Христианович предложил теорию, позволяющую вводить поправки в решения, полученные для закона Дарси, для некоторых законов другого типа. Краткий обзор работ иностранных ученых. О работах русских ученых досоветского периода. Н. Е. Жуковский.

2. Для плоского установившегося движения грунтовых вод самая общая задача из рассмотренных до настоящего времени сводится к отысканию двух аналитических функций на полуплоскости, когда известны линейные однородные соотношения между действительными и мнимыми частями этих функций на отдельных отрезках действительной оси. Эта задача связана с отысканием решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса. В последнее время эта задача стала привлекать внимание иностранных ученых (Ж. Кравченко, Ж. Соважде Сен-Мар, М. Борели).

3. Решение указанной задачи упрощается, если уравнение класса Фукса имеет три особые точки: таковы задачи о прямоугольной перемычке (П. Я. Полубаринова-Кочина и Б. К. Ризинкампф), о перемычке в форме прямоугольной трапеции (Г. К. Михайлов), об обтекании шпунта и плоского флютбета в двуслойном грунте. Некоторые задачи для случая четырех особых точек приведены к элементарным решениям (линза пресной воды над соленой). Ряд расчетов по прямоугольной перемычке проведен в последнее время японскими учеными. Г. К. Михайлов рассмотрел задачу о напорно-безнапорном потоке—это же решение получается для задачи о языке морской воды под пресной водой побережья.

И. А. Чарный нашел точное выражение расхода через перемычку, используя одно интегральное соотношение.

4. Если областью плоскости комплексного потенциала, или функции Жуковского, является прямоугольник, то имеет место задача об определении одной функции на полуплоскости по заданным линейным соотношениям между ее действительной и мнимой частями на отрезках действительной оси. Иначе говоря, для функции обратной скорости получается многоугольник, и становится возможным применение формулы Кристоффеля—Шварца. Таким методом решены задачи о фильтрации из канала и притоке к каналу (без воды) трапецоидального сечения (В. В. Ведерников, Б. К. Ризенкампф, Ю. Д. Соколов). Годограф скорости использован Вейнигом и Шильдсом для применения графического метода (М. Брейтенодер, Г. К. Михайлов).

5. Метод годографа скорости требует знания всех возможных разрезов на его контуре, что иногда бывает трудно. С. Н. Нумеров приводит задачи типа, указанного в разделе 4, к задаче Римана — Гильберта, которую специальной заменой искомой функции сводит к задаче Дирихле. Так, им решен ряд задач: о фильтрации в земляных плотинах, фильтрации при наличии дрены или канала на наклонном и горизонтальном водоупоре и др. В случае более сложных граничных условий (вертикальная дренажная щель) задача сводится к интегральному уравнению.

6. Метод решения задач о движении грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, когда область движения имеет форму многоугольника, разработан Н. Н. Павловским и применен многими авторами к решению частных задач. Интегралы Кристоффеля—Шварца, к которым сводится решение, могут представлять трудности при вычислениях. Разработаны приближенные методы (Н. Н. Павловский, П. Ф. Фильчаков, метод С. Н. Нумерова). Некоторые задачи плановой фильтрации (Н. Н. Веригин и др.). Анизотропные грунты. Вариационные принципы позволяют находить границы, в которых заключаются величины расхода и других элементов движения (М. А. Лаврентьев, Г. Н. Положий).

7. Установившийся приток однородной жидкости к скважинам в водных, нефтяных и газовых пластах. Осесимметричные задачи обычно решаются распределением стоков вдоль оси скважины и надлежащим подбором их интенсивности (М. Маскет, Б. И. Сегал и др.). При постоянной интенсивности в бесконечном и ограниченном пластах решения рассматривали Ф. Самсиое, Н. К. Гиринский и др., для наклонных и горизонтальных скважин—П. Я. Полубаринова-Кочина.

Другой метод—метод рядов Фурье—применялся к задачам о несовершенных и о перфорированных скважинах; в последней задаче обычно видоизменяются граничные условия (Тихов, И. А. Чарный, А. Л. Хейн). Метод прямых применен Я. И. Алихашкиным.

8. Неустановившиеся движения однородных жидкостей и газов. Плоские и некоторые пространственные движения при растекании бугра грунтовых вод, для линеаризированных граничных условий (на примерах—с поправкой на нелинейность) рассмотрены Л. А. Галиным и др.; случаи горизонтальных и вертикальных дрен—В. К. Беляковой. Уравнение типа уравнения теплопроводности широко применяется к изучению режима грунтовых вод С. Ф. Аверьяновым и его учениками (Чжан Вэй-Цинь и др.), Н. Н. Веригиным, Н. К. Гиринским, обобщившим его на многослойные грунты и на пресные и соленые воды, и др. Применяются численные методы (Г. Н. Каменский и др.).

Нелинейное уравнение Буссинеска и его автомодельное решение. Для нелинейного уравнения (типа уравнения теплопроводности) фильтрации газа Л. С. Лейбензона и его обобщений Г. И. Баренблаттом найдено два класса точных решений: автомодельные и решения типа равномерно распространяющихся волн (последние имеют применение в задаче о фильтрации газа в каменноугольном пласте). Разработаны приближенные решения методами, аналогичными тем, которые применяются в теории пограничного слоя (метод Кочина—Лойцянского) (Г. И. Баренблатт, А. М. Пирвердян).

Линеаризированные уравнения решаются методами, разработанными в теории теплопроводности, в частности при помощи операционного исчисления (В. Н. Щелкачев, Н. С. Пискунов, В. П. Пилатовский, А. Ван-Эвердинген и др.).

Численное интегрирование нелинейных уравнений нестационарной фильтрации было выполнено в Америке на электронных машинах Р. Дженкинсом и И. Ароновским.

9. Задача о перемещении поверхности раздела между водой и нефтью. В задаче о вытеснении водою нефти к скважинам подлежат определению две гармонические функции—в нефтяной и водяной частях пласта. На подвижной границе равны давления и выполняются некоторые нелинейные соотношения. Задается начальное положение поверхности раздела (в плоской задаче—контура нефтеносности).

В прямых задачах заданы координаты и дебиты скважин, нужно определить положение поверхности раздела в каждый момент времени. Точные решения получены в простейших случаях прямолинейного и радиального движений, а также для одножидкостной системы, т. е. при одинаковых вязкостях воды и нефти (М. Маскет; исследования советских ученых; работа В. Херста).

В постановке Л. С. Лейбензона давление на подвижном контуре считается постоянным, что соответствует нулевой вязкости воды (П. Я. Полубаринова-Кочина, Л. А. Галин, П. П. Куфарев, А. П. Виноградов). Затруднения, возникающие при решении задачи. Г. С. Салеховым сформулированы обратные задачи—задачи об управлении контуром нефтеносности: определить координаты и дебиты скважин так, чтобы движение контура приближалось к заданному желаемому наилучшим, в известном смысле, образом. Решение получается из условия минимума «невязки», т. е. отклонения действительного движения от заданного (Г. С. Салехов, В. Л. Данилов, В. Д. Чугунов и др.).

Задача о форме поверхности раздела нефти и неподвижной подошвенной воды при потоке нефти к несовершенной скважине («водяной конус») имеет точное решение лишь для плоского движения (Д. А. Эфрос). Для осесимметрического случая дан ряд приближенных решений (М. Маскет, И. А. Чарный и др.). Пределы, между которыми заключен максимально возможный безводный дебит нефти, устанавливаются с помощью некоторых общих интегральных соотношений И. А. Чарным; с их помощью им найдена точная формула для безнапорного притока жидкости к цилиндрической скважине.

10. Движение газированной и неоднородной жидкости в пористой среде. Этот круг вопросов получил особое развитие в последнее время в связи с проблемой максимального извлечения нефти из недр.

Первые теоретические исследования принадлежат Л. С. Лейбензону. Опыты Викова и Ботсета показали, что газовая и жидкая фазы движутся с различными скоростями и что фазовые проницаемости для газа и жидкости являются некоторыми экспериментальными функциями насыщенности парового пространства жидкостью, являющейся новой неизвестной функцией. Для давления и насыщенности получается система очень сложных нелинейных уравнений в частных производных, коэффициенты которых содержат эмпирические функции насыщенности.

Стационарное движение газированной жидкости заменой переменных сводится к задаче о движении фиктивной несжимаемой жидкости (С. А. Христианович). Для нестационарного движения найдены автомодельные решения (М. Д. Розенберг). Разработаны приближенные методы (К. А. Царевич, В. А. Архангельский и др.).

В Америке выполнен ряд расчетов нестационарного движения газированной жидкости на электронных машинах.

Движение водо-нефтяных смесей может рассматриваться как частный случай движения газированной жидкости—тогда задача сводится к уравнению первого порядка в частных производных (Баклей и Леверетт, А. М. Пирвердян и др.).

А. Г. Четаев (*Москва*). **О некоторых задачах об устойчивости движения в механике.** Некоторые особенности в постановке задач об устойчивости движения для механических систем, стесненных неголономными связями. Одно общее свойство уравнений в выражениях для устойчивых движений консервативных голономных систем. В качестве примера: о характере устойчивости лапласового равностороннего треугольника в плоской задаче трех тел, о знакоопределенном интеграле уравнений в вариациях для случая гироскопической устойчивости. Об одной задаче Коши.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ФИЗИКИ

Н. Н. Боголюбов (*Москва*), **Б. В. Медведев** (*Москва*) **и М. К. Поливанов** (*Москва*). **Условие причинности и аналитическая структура матрицы рассеяния.** Квантовая теория поля создавалась исторически как обобщение квантовой механики на поле— систему с бесконечным числом степеней свободы, динамическими переменными которой являются значения поля в каждой пространственной точке. Поэтому естественно, что для описания квантованного поля прибегли к гамильтонову методу, в котором основой является гамильтониан, определяющий либо вид уравнения для изменения волновой функции со временем (представление Шредингера), либо вид уравнений для изменения со временем операторов поля (представление Гайзенберга). Непосредственно наблюдаемые величины (например, вероятности рассеяния) должны были при этом находиться из решений этих уравнений с помощью более или менее сложной процедуры. Что же касается самого гамильтониана, то вид его устанавливался из тех или иных физических соображений относительно свойств рассматриваемой системы. Таким образом, при таком методе построения теории между физическими допущениями о характере рассматриваемой системы и физическими выводами о ее наблюдаемых свойствах лежит весьма долгий путь, на котором приходится преодолевать серьезнейшие математические трудности. Относительного успеха удается достигнуть здесь только за счет применения разложения по постоянной связи между полями. В случае малой постоянной связи остается открытым вопрос о сходимости таких разложений; в случае же большой постоянной связи, как в практически важном случае ядерных сил, эти разложения явно неприменимы и вообще не удается выяснить, к каким следствиям приводит теория. Наконец, применение гамильтонова метода к квантовой теории поля с самого начала содержало в себе известную непоследовательность, поскольку, в силу наличия известных индивидуальных ошибок, не все вводимые в теорию динамические переменные были хотя бы в принципе наблюдаемыми.

Эти обстоятельства побудили Гайзенберга (1943 и 1946 гг.) предложить совершенно новый подход к построению квантовой теории поля, исключающий описание, повидимому, принципиально не наблюдаемых процессов на малых расстояниях. Основной величиной в теории оказывается тогда матрица рассеяния, непосредственно связывающая асимптотические формы волновой функции до и после процесса. Наблюдаемые величины прямо выражаются через элементы этой матрицы. Вид матрицы рассения при таком подходе определяется некоторыми общими, физически очевидными требованиями (релятивистская инвариантность, унитарность, причинность), с одной стороны, и условиями, конкретизирующими рассматриваемую систему—с другой. Такая схема была последовательно разработана и доведена до логической законченности в работах Штюкельберга и Боголюбова, однако эти авторы последовательно использовали разложение по постоянной связи и поэтому полученные ими результаты в существенном не отличаются от полученных гамильтоновым методом.

Ценность указанных работ состоит в том, что была продемонстрирована возможность построения теории без всякой ссылки на такие вещи, как гамильтониан и уравнения движения.

В свете сделанных выше замечаний ясно, что представляется весьма интересной разработка таких методов, которые не используют ни теории возмущений, ни гамильтонова формализма, но непосредственно устанавливают хотя бы некоторые свойства системы двух взаимодействующих полей, исходя из перечисленных выше самых общих физических принципов. В последнее время в работах ряда авторов (Лоу, Гольдбергер, Оеме, Намбу и др., 1955 г.) был достигнут существенный прогресс в этом направлении и получен ряд важных результатов, устанавливающих определенные соотношения, которым должны удовлетворять амплитуды рассеяния, если взаимодействие между полями точечное, т. е. выполняется микроскопическая причинность. Именно, было установлено, что действительная и мнимая части амплитуды рассеяния сопряжены друг другу в смысле преобразования Гильберта. Однако предлагавшиеся до сих пор различные методы вывода этих соотношений не являются достаточно строгими и опираются на некоторые положения, справедливость которых не очевидна.

Авторы предлагают оригинальный вывод этих «дисперсионных» соотношений, который является, по существу, обобщением на многочастичные состояния известного метода Леманна—Челлена. Именно, доказывается теорема, утверждающая, что матричные элементы от матрицы рассеяния по многочастичным состояниям или, что то же самое, вакуумные матричные элементы от многократных вариационных производных матрицы рассеяния по различным полям обладают определенными свойствами аналитичности. Исходя из этих свойств и существенным образом используя условие микроскопической причинности, можно получить и окончательные дисперсионные соотношения. Для частного случая рассеяния бозонов на фермионах вычисления доводятся до конца. Рассмотрены конкретные случаи рассеяния мезонов различного заряда как с переворачиванием, так и без переворачивания спина рассеивателя. Развитый метод может быть легко обобщен на случай рассеяния других частиц.

Основную ценность получающихся результатов авторы видят в том, что их экспериментальная проверка даст возможность ответить на вопрос о пределах применимости единственного «модельного» допущения о точечности взаимодействия.

Н. Н. Боголюбов (*Москва*) **и Д. В. Широков** (*Москва*). **Некоторые вопросы квантовой теории поля.** 1. Основным способом исследования в современной квантовой теории поля является теория возмущений. Однако прямые вычисления теории возмущений приводят к расходящимся выражениям в каждом приближении. Устранение расходимостей из отдельных членов разложений проводится с помощью вычитательной процедуры, которую обычно связывают с ренормировкой основных констант теории— масс и зарядов. Ренормировочная идеология обладает многими недостатками. Постоянные ренормировки оказываются бесконечными, а их конкретный предельный вид— зависящим от способа промежуточной вспомогательной регуляризации, неудачный выбор которой может привести к различным парадоксам. Так, например, вспомогательная регуляризация переходом к нелокальному взаимодействию приводит к отрицательному предельному значению постоянной перенормировки квадрата электрического заряда e^2 и, следовательно, к чисто мнимому заряду, что противоречит основным предположениям теории.

2. Таким образом, ренормировочное обоснование вычитательной процедуры не является удовлетворительным. Но оно также и не является единственным.

Так, рассматривая задачу построения основой величины —матрицы рассеяния S— с помощью явно сформулированных физических условий—причинности, унитарности и ковариантности,—мы получаем возможность обосновать вычитательный формализм без обращения к псевдонаглядным ренормировочным представлениям. Вычитание бесконечностей при этом выступает как составной элемент в процедуре получения конечных выражений из произведений различного числа несобственных сингулярных функций. Рассмотрение этой процедуры облегчается использованием аппарата теории обобщенных функций.

3. В результате устранения бесконечностей мы приходим к разложению, каждый член которого является сходящимся. Вслед за этим встает вопрос о сходимости всего ряда в целом. Показано, что ряды теории возмущений не являются сходящимися.

Предполагается, однако, что они могут оказаться асимптотическими. Этот вопрос является весьма сложным и не исследован до конца. Для дальнейшего мы предположим, что разложения теории возмущений являются в некотором смысле суммируемыми к функциям, сохраняющим ряд основных свойств этих разложений.

4. Одним из таких весьма важных свойств является группа мультипликативных ренормировочных преобразований основных функций Грина и зарядов, имеющаяся в любой ренормируемой теории поля (квантовой электродинамике, псевдоскалярной мезонной теории и т. п.). Сущность ренормализационной группы состоит в том, что как разложения теории возмущений, так и функциональные уравнения Швингера для функций Грина остаются инвариантными при некотором совместном мультипликативном преобразовании функций Грина и зарядов.

Записывая уравнения ренормализационной группы в импульсном представлении и связывая произвольные постоянные с импульсами нормировки функций Грина, приходим к возможности построения дифференциальных уравнений Ли для группы ренормировок.

5. Решение этих уравнений, проводимое с учетом требований соответствия с теорией возмущений, позволяет провести эффективное улучшение формул обычной теории возмущений. Это представляет особенно большой интерес в так называемой ультрафиолетовой и инфракрасной областях импульсных переменных, где эффективный параметр разложения обычной теории возмущений включает в себя соответствующий логарифм и потому не является малым даже при малости постоянной связи. Таким путем, совершенно элементарно, без каких-либо громоздких рассуждений и выкладок, были получены асимптотические выражения для функций Грина в ультрафиолетовой и инфракрасной областях.

6. Среди них было получено известное выражение для фотонной функции Грина с логарифмическим полюсом, рассматриваемое некоторыми авторами как признак внутренней противоречивости теории. Из решения уравнений Ли, однако, также вытекает, что область применимости полученных асимптотических формул ограничена условием малости по сравнению с единицей так называемого инвариантного заряда e^2d, где d—числитель фотонной функции Грина. Иными словами, использование ренормализационной группы позволяет перейти от разложений в области $e^2ln\ll 1$ к разложениям в области $e^2d\ll 1$. При этом оказывается, что при приближении к предполагаемому логарифмическому полюсу условие $e^2d\ll 1$ перестает выполняться и потому вопрос об истинном поведении функции d в районе предполагаемого полюса не может быть решен на основе улучшения теории возмущений. Для исследования этого вопроса необходимо исследовать случай больших e^2 (сильная связь).

7. Наиболее разработанным способом радикального выхода за рамки слабой связи является метод функционального усреднения. В рамках этого метода оказывается возможным получить замкнутые выражения для функций Грина в виде функциональных интегралов. Однако техника вычисления функциональных интегралов находится еще в зачаточном состоянии. Практически вычислению поддаются лишь аппроксимации, приводящие к интегралам гауссового типа. Существенным недостатком метода функционального усреднения является также отсутствие возможности связать функциональные представления функций Грина с требованиями причинности. Ввиду этого метод функционального усреднения в квантовой теории поля в настоящий момент не представляется достаточно перспективным.

8. Большой интерес представляет развивающееся в самое последнее время новое направление исследований, не связанное с теорией возмущений. Это направление основано на непосредственном приложении условия причинности к исследованию свойств процессов рассеяния и получению так называемых дисперсионных соотношений.

Изложению этого круга вопросов посвящен обзорный доклад Боголюбова, Медведева и Поливанова.

Л. А. Вайнштейн (*Москва*). **О некоторых новых методах в математической теории дифракции.** Доклад посвящен обзору новых методов в теории дифракции монохроматических волн (акустических и электромагнитных)—методов, так или иначе связанных с задачей о диффракции на открытом конце волновода (полубесконечной трубы). Эти методы позволили получить строгие решения ряда диффракционных задач и в настоящее время применяются также для получения приближенных решений.

В простейшем случае задача о диффракции волн на открытом конце волновода сводится к интегральному уравнению

$$\int\limits_0^\infty l(z-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta = 0, \tag{1}$$

где $f(z)$ — неизвестная функция, в электродинамических задачах равная плотности поверхностного тока на бесконечно тонкой стенке волновода, в акустических — пропорциональная скачку давления или потенциала скоростей на стенке. Ядро интегральнго уравнения $l(z-\zeta)$ зависит лишь от абсолютной величины разности $z-\zeta$; для волноводов различной геометрии и для волн различных типов функция $l(z-\zeta)$ имеет различный вид.

К интегральному уравнению (1) может быть применен (с небольшой модификацией) метод Винера — Хопфа и Фока. Для этого $f(z)$ ищется в виде обобщенного интеграла Фурье

$$f(z) = \int\limits_C e^{iwz} F(w) dw \tag{2}$$

по контуру C, в основном проходящему по вещественной оси, и интегральное уравнение (1) преобразуется в систему функциональных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_C e^{iwz} F(w)\, dw = 0 \quad \text{при} \quad z < 0, \\ &\int\limits_C e^{iwz} L(w) F(w)\, dw = 0 \ \text{при} \ z > 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $F(w)$ — неизвестная функция, а

$$L(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iwz}\, l(z)\, dz. \tag{4}$$

Решение системы уравнений (3) строится с помощью «факторизации» функции $L(w)$ и использования свойств функции $F(w)$ во всей плоскости комплексного переменного w. Систему (3) нетрудно свести к так называемой задаче Гильберта, рассматриваемой в теории сингулярных интегральных уравнений. Действительно, из (3) следует, что функция $F(w) = \Phi^-(w)$ ниже контура C голоморфна и при $|w| \to \infty$ стремится к нулю, а произведение $L(w) F(w) = \Phi^+(w)$ обладает теми же свойствами выше контура C, и мы приходим к задаче Гильберта для кусочно-голоморфной функции $\Phi(w)$. Ее решение совпадает, разумеется, с результатом прямого решения (1).

Интересно, что (3) можно вывести сразу, минуя интегральное уравнение (1), если искать решение волнового уравнения или уравнений Максвелла в виде обобщенного интеграла Фурье (подобного (2)) и с граничным условием на бесконечно жесткой (в акустике) или идеально проводящей (в электродинамике) стенке при $0 < z < \infty$. Тем самым достигается единообразие в рассмотрении различных диффракционных задач, поскольку наряду с интегральным уравнением (1) в ряде случаев получается интегродифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int\limits_0^\infty l(z-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{5}$$

При исследовании несимметричных (т. е. зависящих от азимута φ) электромагнитных волн в полубесконечной круглой трубе мы должны определить две неизвестные функции $F(w)$ и $G(w)$, что соответствует наличию двух составляющих плотности тока на стенке (z-й и φ-й). В этом случае мы получаем систему четырех функциональных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_C e^{iwz} G(w)\,dw = 0 \quad \text{при} \quad z < 0,\\
&\int\limits_C e^{iwz} \left[F(w) + \frac{ip}{a}\frac{w}{v^2} G(w) \right] dw = 0 \quad \text{при} \quad z < 0,\\
&\int\limits_C e^{iwz} v\varphi(wa) F(w)\,dw = 0 \quad \text{при} \quad z > 0,\\
&\int\limits_C e^{iwz} \left[\frac{\psi(wa)}{v} G(w) + \frac{ip}{k^2 a}\frac{w\varphi(wa)}{v^2} F(w) \right] dw = 0 \quad \text{при} \quad z > 0,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

эквивалентную задачe Гильберта для двух кусочно-голоморфных функций. Здесь a означает радиус трубы, $v=\sqrt{k^2-w^2}$, k — волновое число в свободном пространстве

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(wa) &= \pi v a H_p(va) J_p(va),\\
\psi(wa) &= \pi v a H_p'(va)\, J_p'(va),
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

J_p — функцию Бесселя, $H_p = H_p^{(1)}$ — функцию Ханкеля, p — индекс, характеризующий зависимость поля от азимута и принимающий значения $p=1,\ 2,\ \ldots$ ($p=0$ соответствует симметричным волнам).

Несмотря на то, что задача Гильберта для двух функций в общем случае не решается, систему уравнений (6) удалось решить в замкнутом виде и исследовать соответствующие диффракционные поля.

Описанные выше методы впервые были применены к задаче о так называемой береговой рефракции радиоволн—к задаче, являющейся, по существу, диффракционной. С помощью этих методов была рассчитана также диффракция плоской волны на периодически расположенных параллельных полуплоскостях, решены некоторые задачи о разветвлении волноводов, о переходе коаксиальной линии в круглый волновод или однопроводную линию и т. д. Можно также решить задачу о диффракции плоской волны на периодической решетке, состоящей из бесконечно длинных параллельных лент; эта задача свелась к функциональным уравнениям вида (3), хотя в ней никаких полубесконечных тел нет.

Некоторые из перечисленных выше задач (диффракция на периодически расположенных полуплоскостях, разветвление волновода) рассмотрены в литературе также и с иной точки зрения. Именно, вся область сложной формы, занятая полем, мысленно разбивается на ряд областей простой геометрической формы, где с помощью метода разделения переменных нетрудно найти частные решения волнового уравнения (или уравнений Максвелла) и затем написать общее решение в виде суперпозиции этих частных решений с неизвестными коэффициентами. «Смыкание» этих решений на границах областей приводит, как известно, к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов.

Обычно такой прием дает лишь формальное решение задачи, поскольку даже приближенное определение некоторых коэффициентов связано с большими вычислительными трудностями. Однако в данных задачах бесконечную систему линейных алгебраических уравнений удается решить в замкнутом виде. Соответствующие приемы представляют определенный интерес; эвристическое значение их не очень велико, поскольку они близки к приемам, используемым при решении этих же задач с помощью функциональных уравнений (3).

Все сказанное выше относилось к дифракционным задачам, допускающим точное (в математическом смысле этого слова) решение. В последнее время появился ряд работ, в которых изложенные методы применяются для приближенного построения решения. Так, например, исходя из теории бесконечного и полубесконечного «трубчатого» провода, возбуждаемого падающей плоской волной или сосредоточенной электродвижущей силой, пишется решение для конечного отрезка провода, т. е. для вибратора. При этом действие каждого конца провода на поле вокруг него учитывается, так сказать, изолированно, как если бы другого конца не было.

Данную задачу можно свести к интегродифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\int\limits_0^{z_0} l(z-\zeta)\,f(\zeta)\,d\zeta = g(z), \tag{8}$$

где $g(z)$—заданная функция. Поскольку такое уравнение точно решено быть не может, строят его приближенное решение с помощью функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\int\limits_0^{\infty} l(z-\zeta)\,f_1(\zeta)\,d\zeta = g_1(z),\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\int\limits_{-\infty}^{z_0} l(z-\zeta)\,f_2(\zeta)\,d\zeta = g_2(z),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

которые при заданных правых частях $g_1(z)$ и $g_2(z)$ уже можно решить.

Как нам представляется, возникающие здесь математические вопросы далеко не исчерпаны и к ним хотелось бы привлечь внимание математиков.

В заключение отметим тесную математическую связь между рассмотренными выше методами теории дифракции и теорией экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов. Действительно, эта теория приводит к интегральным уравнениям вида (1) и функциональным уравнениям вида (3), так что математический аппарат теории случайных процессов аналогичен рассмотренным выше дифракционным методам. Эта аналогия продолжается и дальше: недавно появившиеся работы по электромагнитным волнам в полубесконечных периодических структурах в методическом отношении близки к теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных последовательностей.

И. М. Гельфанд (*Москва*), **Р. А. Минлос** (*Москва*), **А. М. Яглом** (*Москва*). **Континуальные интегралы.** 1. Континуальные интегралы (точнее, интегралы в функциональном пространстве) в настоящее время в математике сравнительно широко используются только в теории вероятностей (в теории случайных процессов); использование такого интегрирования в теоретической физике еще только начинается. Естественно думать, однако, что континуальные интегралы будут наиболее адекватным математическим аппаратом в большом числе физических задач, имеющих дело с системами с бесконечным числом степеней свободы (в первую очередь в задачах квантовой теории поля и физической гидродинамики).

2. Важнейшей мерой в функциональном пространстве является мера Винера, возникающая в задаче о броуновском движении свободной частицы без инерции. Вычисление интегралов по этой мере в силу результатов Фейнмана и Каца в ряде случаев может быть сведено к решению некоторых дифференциальных уравнений параболического типа, что может представлять интерес также и для теории дифференциальных уравнений.

3. В ряде задач математической физики, естественно, возникают «обобщенные меры» в функциональном пространстве—правила интегрирования функционалов, не связанные, строго говоря, ни с какой вполне аддитивной мерой. Такие обобщенные меры появляются, в частности, при представлении в виде функциональных интегралов решений ряда дифференциальных уравнений, отличных от простейшего уравнения параболического типа. Важным специальным случаем «обобщенной меры» является «мера Фейнмана», введенная Р. Фейнманом в связи с предложенным им новым путем построения нерелятивистской квантовой механики.

4. Аналогично фейнмановскому построению обычной квантовой механики может строиться и квантовая теория поля; при этом основную роль играет специальное континуальное интегрирование в пространстве волновых полей (функций от четырех переменных x, y, z и t). Роль формулы Фейнмана, задающей волновую функцию в виде континуального интеграла, здесь играет аналогичное представление «волнового функционала» или, иначе, представление в виде функционального интеграла функции Грина квантовой теории поля, предложенное Н. Н. Боголюбовым. Для преобразования и упрощения получаемых формул можно пользоваться общими правилами преобразования интегралов по винеровской мере, содержащимися в ряде работ Камерона и Мартина; в некоторых случаях на этом пути могут быть получены эффективные окончательные результаты.

5. Наряду с квантовой механикой континуальные интегралы могут использоваться при рассмотрении целого ряда других физических задач (некоторые задачи о броуновском движении непрерывных систем, теория турбулентности, теория передачи информации, ряд задач физической статистики). Во многих случаях при этом полезным оказывается понятие характеристического функционала, аналогичного характеристической функции теории вероятностей.

6. Континуальные интегралы весьма удобны при исследовании асимптотического поведения квантовых систем при $h \to 0$ («квазиклассическое приближение»); аналогичное применение эти интегралы могут иметь и в квантовой статистике. С другой стороны, использование континуальных интегралов позволяет удобно исследовать низшие энергетические уровни квантовых систем; типичным примером здесь является теория поляронов. Дальнейшее применение континуальных интегралов связано с использованием разложения по степеням некоторого параметра (метод теории возмущений и метод теории сильной связи) и с развитием аналитической техники оперирования с подобными выражениями.

М. Л. Картрайт (M. L. Cartwright) (*Лондон*). **Обобщение уравнения Ван дер Поля.** (Сообщение М. Л. Картрайт о ее совместной работе с И. Е. Литтльвудом). Профессора Литтльвуда и меня интересовало описание Ван дер Поля и Ван дер Марка, данное ими в 1928 г., в котором система для некоторых значений параметров представлена дифференциальным уравнением 2-го порядка, имеющим две субгармоники порядка n и $n+1$ для больших значений n.

Уравнение системы до некоторой степени подобно следующему:

$$\ddot{y} + k(y^2 - 1)\dot{y} + y = b\mu k \cos \mu t, \qquad 0 < b < \frac{2}{3}, \tag{1}$$

где k—достаточно большое число, но для этого уравнения субгармоники имеют порядок $2n-1$ и $2n+1$.

Мы исследовали общее поведение решения этого уравнения и краткое содержание результатов опубликовали в журнале Лондонского математического общества в 1928 г., но отложили полную публикацию, так как наш метод полностью пригоден и для уравнения

$$\ddot{y} + kf(y)\dot{y} + g(y) = bkp(t), \tag{2}$$

где k—большое число, $p(t)$— периодическая функция, $p(\pi + t) = -p(t)$, $f(y)$— четная, $g(y)$—нечетная, f'', g''—непрерывны, $f > 0$ для $|y| > 1$ и $f < 0$ для $|y| < 1$,

$g' > 0$ и p удовлетворяет некоторым другим простым условиям. Мы теперь распространили наши результаты на это общее уравнение.

Если решение вышеупомянутого уравнения имеет вид $y - 1 - dk^{-\frac{1}{2}}$ для $t > 3\pi$, то $|\dot{y}| < A(d)$, и решение (1) дается приближенно формулой

$$\frac{1}{3}y^3 - y = C + b(1 + \sin t) + O(1/k). \tag{3}$$

Каждый период 2π уменьшает постоянную C на $O(1/k)$ до тех пор, пока решение или станет вместе с $\dot{y} > Dk$ ниже $y = -1$, где оно будет совершать колебания, или останется для времени $< 2\pi$ в неустойчивой области $|y| < 1$. В последнем случае возможно много альтернатив, некоторые из которых могут соответствовать неустойчивым периодическим решениям.

Таким образом, решения постепенно приводятся к приближенно периодическим или к периодическим.

Доказательство того, что приближенно периодическое решение есть периодическое, длинно, а доказательство того, что существуют значения b, для которых имеются два устойчивых решения периодов $(2n-1)2\pi$ и $(2n+1)2\pi$, довольно трудно. Мы рассматриваем только случай $\frac{1}{100} \leqslant b \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{100}$, а тогда n имеет порядок k. В случае уравнения (2) члены $\frac{1}{3}y^3 - y$ и $1 - \sin t$ заменяются членами $\int\limits_0^y f(y)\,dy$ и $\int\limits_0^t p(t)\,dt$.

Интерес этих результатов отчасти состоит в топологической интерпретации в случае двух субгармоник различных порядков. Решение, для которого $y = \xi_0$, $\dot{y} = \eta_0$, при $t = 0$, и $y = \xi_1$, $\dot{y} = \eta_1$, при $t = 2\pi$, определяет топологическое преобразование плоскости ξ, η самой в себя.

Ю. А. Митропольский (*Киев*). **Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.** Одним из наиболее эффективных способов исследования нелинейных колебательных процессов является метод асимптотических разложений по степеням малого параметра. С помощью этого метода в большом числе практически важных случаев удается получить сравнительно простые расчетные схемы и детально выяснить характер протекания колебательного процесса.

Эти методы дают возможность эффективно исследовать колебательные системы, достаточно близкие к линейным, т. е. системы, для которых соответствующие дифференциальные уравнения хотя и являются нелинейными, однако содержат некоторый малый параметр ε, при нулевом значении которого они вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. При этом предполагается, что параметр ε является «малым».

Решения указанных уравнений при помощи обычных методов разложения решений в ряд по степеням параметра ε приводит к появлению секулярных членов, ввиду чего получающиеся приближенные формулы не могут быть использованы для изучения колебательного процесса на длительном интервале времени.

Асимптотические методы уничтожения секулярных членов, разработанные астрономами, не применимы к исследованию многих колебательных систем ввиду того, что последние являются, как правило, системами неконсервативными.

Асимптотические приближения Ван дер Поля сыграли существенную роль в развитии учения о нелинейных колебаниях, однако они выводились из чисто интуитивных соображений и оставались неясными вопросы теоретического обоснования и пределы применимости.

Строгие методы нахождения периодических решений уравнений, содержащих малый параметр, разработанные Пуанкаре, а также методы исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений, разработанные Ляпуновым, впервые были применены для исследования нелинейных колебательных систем Мандельштамом, Папалекси, Андроновым и их сотрудниками.

Параллельно с этими методами Крыловым и Боголюбовым был развит новый подход к изучению нелинейных колебаний, основанный на построении асимптотических разложений, представляющий по идее дальнейшее развитие асимптотических методов, установленных астрономами.

Новые асимптотические методы Крылова—Боголюбова пригодны для исследования колебательных систем, являющихся, как правило, неконсервативными системами.

Эти методы дают возможность, с одной стороны, получить алгорифм для построения решений, позволяющих производить количественный анализ колебательных систем и исследовать как первые, так и высшие приближения, как периодические, так и квазипериодические режимы, процессы установления и т. д. С другой стороны, эти методы позволяют произвести теоретико-качественные исследования свойств решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр.

Асимптотические методы Крылова—Боголюбова нашли широкое применение в электро- и радиотехнике, машиностроении, теории регулирования и других областях физики и техники при исследовании колебательных процессов.

Дальнейшее развитие асимптотических методов Крылова—Боголюбова как в теоретическом отношении, так и в применении к новым задачам теории колебаний.

А. М. Обухов (*Москва*) **и А. М. Яглом** (*Москва*). **Микроструктура развитой турбулентности.** 1. Современный этап изучения развитой турбулентности характеризуется широким применением в этой области гидродинамики математического аппарата теории вероятностных процессов и полей. Плодотворность такого подхода в первую очередь связана с предложенной А. Н. Колмогоровым схемой локально однородной и локально изотропной турбулентности, позволившей распространить методы, развитые в применении к весьма специальному случаю однородной и изотропной турбулентности, на широкий класс турбулентных потоков.

2. При математическом анализе структуры локально однородной и локально изотропной турбулентности основную роль играют структурные функции—средний квадрат разности гидродинамических элементов потока и корреляции между различными такими разностями как функции от расстояния между соответствующими точками. Использование соображений теории размерностей позволяет количественно описать структуру всех основных гидродинамических полей (поля скоростей, давлений, температуры или концентрации примеси и т. д.), т. е. определить характер зависимости от расстояния для структурных функций всех этих полей. Для уточнения этих результатов в области наименьших вихрей и оценки фигурирующих в них числовых коэффициентов приходится принимать еще некоторые дополнительные допущения (о постоянстве асимметрии продольной разности скоростей, о связи четвертых моментов со вторыми и др.); в частности, последнее из этих допущений, неплохо подтверждающееся экспериментальными данными, позволяет однозначно выразить через структурную функцию поля скоростей характеристики структуры полей давления и ускорений, характеристики связи поля скоростей с полем давлений и ряд других статистических характеристик потока.

3. Проверка выводов теории локально однородной и локально изотропной турбулентности на экспериментах в аэродинамических трубах наталкивается на определенные трудности; наиболее удобным объектом приложения этой теории является атмосферная турбулентность (и турбулентность в океане). В настоящее время имеется значительный материал непосредственных измерений характеристик структуры поля скоростей ветра и поля температуры в атмосфере, хорошо согласующийся с теоретическими заключениями. Удается также проверить (и в атмосфере и в океане) теоретическую зависимость коэффициента диффузии от размера диффундирующего облака (так называемый «закон 4/3»).

4. Теория локально изотропной турбулентности имеет многочисленные важные применения в аэродинамике, физике атмосферы и астрономии. В частности, одним из интересных приложений этой теории является ее приложение к задаче о распространении волн (звука, света) в турбулентной атмосфере. Пользуясь теоретическими данными о структуре метеорологических полей, удается явно рассчитать флюктуации характеристик волн (фазы, амплитуды) при различных условиях распространения. Полученные в этом направлении результаты допускают сравнение с имеющимися эмпирическими данными о распространении звука и света в реальной атмосфере.

О. С. Парасюк. (*Киев*). **Обобщенные функции в теории поля.** Как в классической, так и в квантовой теории поля приходится иметь дело с различными специальными обобщенными функциями. Однако наиболее полное применение теория обобщенных функций Соболева—Шварца получила в квантовой теории поля.

Основные функции квантовой теории поля—а) перестановочные, б) причинные—являются обобщенными.

При построении матрицы рассеяния в квантовой теории поля с помощью теории возмущений возникает задача умножения причинных функций. Импульсный образ произведения причинных функций приводит, как правило, к расходящимся интегралам при больших импульсах. Таким образом, возникает проблема придания конечного значения этим расходящимся интегралам.

Попытка решения этой задачи привела к разработке вычитательной процедуры Швингер, Фейнман, Дайсон, Салам). Однако содержащиеся в работе Салама доказательства теоремы о том, что вычитание действительно приводит к конечным результатам, не является строгим, а сама вычитательная процедура математически не осмыслена.

Новый подход к этим вопросам вытекает из теории матрицы рассеяния Боголюбова. Эта теория дает для n-го приближения матрицы рассеяния операторное выражение, явная запись коэффициентных функций которого приводит к формулировке вычитательной процедуры. Установление рекуррентных соотношений для вычитательной операции, а также использование метода собственного времени Фока для записи причинных функций позволяют строго доказать теорему Салама, равно как и аналитичность импульсного образа полученного произведения в верхних полуплоскостях.

В итоге получается следующая математически осмысленная схема определения умножения причинных функций: сначала произведение причинных функций определяется как функционал на некотором классе основных функций, аннулирующихся при совпадении аргументов, а затем с помощью вычитательной процедуры этот функционал продолжается на все пространство основных функций.

Лит.: 1. Сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», М., 1954. 2. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., УФН, 55, (1955); 57, (1955). 3. Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С., ДАН СССР, **100**, № 1, (1955). 4. Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С., ДАН СССР, **100**, № 3, (1955). 5. Парасюк О. С., ДАН СССР, **100**, № 5, (1955).

Г. И. Петрашень (*Ленинград*). **О работах по распространению нестационарных волн (звуковых, сейсмических и т. п.), выполненных за 1950—1955 гг.** Разрешение ряда важных проблем сейсмологии и сейсморазведки, а также акустики оказывается связанным с изучением распространения нестационарных волн в многослойных средах, содержащих границы раздела различной формы. В случае слоисто-изотропных сред простейшего вида рассмотрено значительное число нестационарных задач на распространение волн. Полученные результаты сводятся в основном к следующему.

1. Решение задач на распространение сейсмических волн в средах, состоящих из изотропных плоскопараллельных слоев, доведено до степени законченности, позволившей перейти к внедрению результатов теории в практику сейсмологии и сейсморазведки. Сформулированы несложные правила, позволяющие выписывать точные формулы для полей смещения любых волн, распространяющихся в среде. Указаны приближенные формулы, характеризующие главные части (вступления) отраженных

и головных волн, и составлены таблицы вспомогательных величин для построения теоретических сейсмограмм. При формулировке теоретических выводов учитываются особенности аппаратуры, применяемой в сейсмологии.

2. Найдены способы изучения интерференционных явлений и явлений экранирования в средах, содержащих тонкие слои.

Рассмотрен ряд вопросов, связанных с формированием и распространением интерференционных волн (типа волн Лявы), а также головных (боковых) волн, возникающих в тонких слоях.

3. Разработаны методы исследования процессов распространения упругих и звуковых волн в средах, содержащих сферические или цилиндрические границы раздела.

Дано решение задачи Лемба для упругой сферы и произведено его исследование, позволившее установить свойства нестационарных волн—поверхностной (релеевской), а также объемных, распространяющихся в сфере.

Рассмотрено решение задачи на отражение и преломление нестационарных упругих волн на сферической или цилиндрической границах раздела двух сред. Решено несколько задач на диффракцию волн от тел сферической и цилиндрической формы, а также от двугранного угла.

4. Произведен на основании исследования точных решений задач теории упругости вывод уравнений колебания пластин и стержней, применяемых в инженерной практике. Установлены границы применимости таких уравнений.

5. Рассмотрен ряд задач на излучение и распространение нестационарных акустических волн в жидкости. Положено начало разработки теории прибора, оптимального для регистрации того или иного нестационарного явления.

6. Начата разработка проблем распространения нестационарных волн в неоднородных средах. Рассмотрен ряд задач для сред с плоскопараллельными границами раздела при помощи точного и лучевого методов.

Л. С. Понтрягин (*Москва*). **Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных.** К числу важных применений теории обыкновенных дифференциальных уравнений относится радиотехника. Система уравнений, описывающая работу любого радиотехнического прибора, всегда составляется на основе некоторой идеализации прибора. Радиотехнический прибор собирается из ряда деталей: электронных ламп, конденсаторов, индуктивностей и т. п. Физические величины, характеризующие эти детали, как то: числовая величина емкости конденсатора, числовая величина индуктивности и т. п., называются параметрами прибора. Кроме деталей, предусмотренных конструкцией прибора, в него, как правило, входят паразитные детали; им соответствуют паразитные, обычно малые параметры. Таковы внутриламповые емкости, индуктивности коротких соединяющих проводов и т. п. При идеализации естественно пренебречь малыми паразитными параметрами. Обнаружилось, однако, что такое пренебрежение в ряде случаев дает не только неточное, но даже качественно неправильное описание работы прибора. Если составить систему дифференциальных уравнений с учетом малых паразитных параметров, то может случиться, что они входят коэффициентами при высших производных, так что, считая эти параметры равными нулю, мы получаем систему уравнений более низкого порядка, притом зачастую неразрешимую относительно оставшихся высших производных. Именно при этих обстоятельствах пренебрежение малыми паразитными параметрами может привести к неадекватному описанию физического явления. Ниже рассматривается довольно общая система дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных—система, которая в ряде случаев дала правильное объяснение работы соответствующего прибора, невозможное при пренебрежении малым параметром.

Пусть

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad y=(y_1, y_2, \ldots, y_l)$$

неизвестные функции времени t, ε — малый положительный параметр и

$$\varepsilon x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l), \qquad y_j' = g_j(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \tag{1}$$

или, в векторной форме,

$$\varepsilon x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y) \tag{2}$$

система дифференциальных уравнений, описывающая изменение векторных функций x, y. Основной подход к системе (2) заключается в том, что первоначально рассматривается система уравнений

$$\varepsilon x' = f(x, y), \tag{3}$$

где y считается постоянным параметром. Естественно считать, что система (3) управляет изменением «быстро меняющейся» функции x.

В самом деле, если в точке (x, y) вектор $f(x, y)$ отличен от нуля, то фазовая скорость $\left(\frac{f}{\varepsilon}, g\right)$ в этой точке направлена почти в точности по вектору $\left(\frac{f}{\varepsilon}, 0\right)$. Будем предполагать, что в системе (3) «быстрых движений» каждое решение при $t \to \infty$ приближается, вообще говоря, либо к устойчивому положению равновесия, либо к устойчивому предельному циклу. Заметим, что положение равновесия системы (3) удовлетворяет условию

$$f(x, y) = 0. \tag{4}$$

Таким образом, если решение системы (3) приближается к положению равновесия, то вектор f приближается к нулю. После того, как точка достаточно приблизилась к поверхности (4), переменные x и y начинают меняться со сравнимыми между собой скоростями, и решение системы (2) с точностью до ε совпадает с решением системы

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ y' &= g(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При этом решение системы (2) в своем движении сопровождает некоторое устойчивое положение равновесия системы (3) при меняющемся y. Это движение, однако, сохраняет свой характер лишь до тех пор, пока соответствующее устойчивое положение равновесия не сольется с неустойчивым положением равновесия и не перестанет существовать, после чего происходит явление срыва, и решение системы (2) с точностью до ε совпадает с решением системы (3), пока не приблизится к новому положению равновесия системы (3). В окрестности точки срыва решение системы (2) отклоняется от решения системы (5) на величины порядка, большего, чем ε, именно с точностью до ε на величину

$$a\varepsilon^{\frac{2}{3}} + b\varepsilon \ln \varepsilon;$$

величины коэффициентов a и b зависят лишь от значений функций f и g и их нескольких производных в точке срыва (эти коэффициенты вычислены). В результате ряда медленных движений, близких к движениям системы (5), и ряда срывов траектория системы (2) может замкнуться. Такая траектория вычислена (как и ее период) с точностью до величин порядка ε, причем период имеет вид

$$p + q\varepsilon^{\frac{2}{3}} + r\varepsilon \ln \varepsilon,$$

где коэффициенты p, q, r вычислены.

В случае, если решение системы (3) стремится к устойчивому периодическому решению, решение системы (2) с точностью до ε вычислено для тех значений t, при которых соответствующее периодическое решение системы (3) не перестает существовать и быть устойчивым в силу изменения величины y.

При этом изменение величины y с точностью до ε управляется системой уравнений

$$y' = G(y), \tag{6}$$

где функция $G(y)$ получается осреднением функции $g(x, y)$ вдоль соответствующего периодического решения.

Доказано, что если система (6) имеет устойчивое положение равновесия y_0, то система (2) имеет устойчивое периодическое решение (близкое к периодическому решению системы $\varepsilon x' = f(x, y_0)$).

А. А. Соколов (*Москва*). **Теория светящегося электрона.** Энергия, излучаемая в единицу времени вращающимся по окружности радиуса r с релятивистской энергией $E \gg mc^2$ электрона в классическом случае определяется формулой

$$W_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{r^2} (E/mc^2)^4.$$

Спектральное распределение интенсивности излучения в зависимости от номера гармоники в ультрарелятивистском случае обладает рядом особенностей [1]. В самом деле (см. [2]),

$$dW = W_0 \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y\, dy \int\limits_y^\infty K_{5/3}(x)\, dx,$$

где $y = \frac{2}{3} \nu \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3$, а $K_{5/3}$ — известная вторая функция Бесселя от мнимого аргумента. С помощью этих формул легко показать, что максимум интенсивности излучения приходится не на основной тон, а на высокую гармонику:

$$\nu \cong {}^1/_2 (E/mc^2)^3.$$

Благодаря этому вращающийся по окружности с макроскопическим радиусом электрон может при сравнительно больших энергиях начать испускать видимый свет. Поэтому излучающий электрон разумно назвать «светящимся электроном».

Совместно с И. М. Терновым нами были исследованы поляризационные свойства излучения светящегося электрона в зависимости от угла излучения и номера гармоники.

Учет квантовых поправок для излучения светящегося электрона привел также к довольно неожиданным результатам. Для полной интенсивности излучения была получена формула (см [3]):

$$W = W_0 \left\{1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \frac{\hbar}{mcr} (E/mc^2)^2\right\}.$$

Отсюда видно, что квантовые поправки скажутся при весьма высоких энергиях $E \sim E_{1/2} = mc^2 (mcr/\hbar)^{1/2}$. Однако, как было указано в [4] и вычислено в [5], при более низких энергиях $E \sim E_{1/5}$ благодаря квантовому характеру излучения фотонов должно происходить возбуждение радиальных колебаний.

Амплитуда a радиальных колебаний должна возрастать по закону

$$a^2 = a_0^2 \frac{E_0}{E} + \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e^2\hbar}{mEr(1-q)^2} \int\limits_0^t (E/mc^2)^6\, dt,$$

где E_0 и a_0 — соответственно начальная энергия и начальная амплитуда колебаний, а q — показатель спадания магнитного поля вблизи равновесной орбиты.

Уширение траектории представляет собой типичный квантовый эффект, так как эта величина пропорциональна постоянной Планка $\hbar$.

Однако это выражение может быть получено также и полуклассическим способом. Для этого в классических уравнениях, описывающих радиальные колебания электрона, следует учесть еще флуктуационную силу, действующую в радиальном направлении. Тогда радиальные колебания будут описываться уравнением

$$\frac{E}{c^2} \ddot{\rho} + \frac{E}{r^2}(1-q)\rho = \frac{E}{c^2} \Delta r \delta'(t - ti),$$

где ρ — радиальное отклонение электрона от стационарной орбиты, а E/c^2 — релятивистская масса электрона.

Совместно с А. Н. Матвеевым мы показали, что силой радиационного трения для этих, так называемых бетатронных колебаний мы можем пренебречь, так как время затухания имеет слишком большое значение:

$$\tau = \frac{3r^2}{2r_0 c(1-q)} \frac{mc^2}{E},$$

где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ — радиус электрона.

Определяя путем деления на оператор координату ρ и предполагая, что излучение фотонов происходит статистически независимо, мы можем вновь получить квантовую формулу. В тождественности обоих методов мы склонны усмотреть связь между квантовой теорией и теорией флуктуаций, в основе которых лежат статистически независимые процессы.

Электрон, описывающий эти радиальные колебания, будет представлять собою своеобразный «макроатом», поскольку амплитуда радиальных колебаний достигает макроскопических размеров, а законы колебаний становятся квантовыми.

Лит.: 1. Иваненко Д. Д. и Померанчук И. Я., ДАН СССР, **44**, 343, (1944); Арцимович Л. А. и Померанчук И. Я., Journ. of Phys. USSR, 9, 267, (1945). 2. Иваненко Д. и Соколов А., ДАН СССР, **59**, 1551, (1948); J. Schwinger, Phys. Rev., **75**, 1912, (1949); см. также Иваненко Д. Д. и Соколов А. А., «Классическая теория поля», 279. 3. Соколов А., Клепиков Н. и Тернов И., ЖЭТФ, 23, 632, (1952); 24, 249, (1953); см. также J. Schwinger, Proc. Nat. Ac. Sci., 40, 132, (1954). 4. Соколов А., ДАН СССР, **67**, 1013, (1949). 5. Соколов А. и Тернов И., ЖЭТФ, 25, 698, (1953); 28, 431, (1955).

А. Н. Тихонов (*Москва*), **А. Б. Васильева** (*Москва*), **В. М. Волосов** (*Москва*). **О зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров.** В случае, когда правые части системы

$$\dot{y}_i = f_i(y_k, t, \mu), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

непрерывно зависят от параметров μ_j при $\mu_j \to 0$, решение задачи Коши или краевой задачи или системы (1) непрерывно зависит от параметров. Настоящее сообщение посвящено рассмотрению ряда случаев, когда зависимость правых частей системы от параметров при $\mu_j \to 0$ не является непрерывной. К задачам подобного рода приводит изучение ряда физических вопросов, как-то: вопросов теории автоматического регулирования, химической кинетики, движения частиц в сильных полях (ускорители), нелинейных колебаний систем с медленно изменяющимися параметрами, а также вопросов, связанных с квазиклассическим приближением в квантовой механике.

1. Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{X}(\vec{x}, \vec{y}_k, t, \mu_j), \\ \mu\dot{\vec{y}}_i &= \vec{Y}_i(\vec{x}, \vec{y}_k, t, \mu_j), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\vec{x}$, $\vec{y}_i$ — векторные функции. При $\mu_j = 0$ получается вырожденная система

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{X}, \\ \vec{Y}_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Будем предполагать, что система уравнений $\vec{Y}_i = 0$ разрешима и имеет корень $\vec{y}_k = \varphi_k(\vec{x}, t)$. Вопрос о непрерывной зависимости решений (2) от μ_j при $\mu_j \to 0$ сводится в этом случае к вопросу об устойчивости корня, которая определяется свойствами некоторых вспомогательных систем, называемых присоединенными системами. Если уравнения $\vec{Y}_i=0$ имеют несколько устойчивых корней с ограниченными областями определения, то может произойти переход решения (2) из окрестности одного корня к другому, что приводит к появлению «разрывных» решений вырожденной системы (3).

2. Для систем, рассмотренных в п. 1, у которых существует предельное решение, ставится вопрос о вычислении предельных значений производных решений полной системы (2) по μ_j при $\mu_j \to 0$, что существенно для оценки уклонения решений (2) от предельного решения при малых значениях μ_j. Производные по μ_j решений системы (2) при $\mu_j \neq 0$ определяются уравнениями в вариациях с нулевыми начальными значениями. Предельные значения производных определяются из вырожденной системы, соответствующей уравнениям в вариациях с измененными начальными условиями. Выведены формулы для вычисления сдвига начальных значений.

3. В случае, если уравнения $\vec{Y}_i=0$ не разрешимы относительно $\vec{y}_k$, непрерывная зависимость решений от μ_j при $\mu_j \to 0$, вообще говоря, отсутствует. Случай подобного рода подробно изучен для уравнения n-го порядка

$$\mu y^{(n)}+\Phi(y^{(n-2)}, \quad y^{(n-3)}, \ldots, y, x)=0 \tag{4}$$

с пропущенной $(n-1)$-й производной. При выполнении некоторого условия устойчивости решение (4) ведет себя при $\mu \to 0$ следующим образом: $\mu \to 0: y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, вообще говоря, не ограничены, $y^{(n-2)}$ колеблется с ограниченной амплитудой и периодом порядка $\sqrt{\mu}$, $y^{(i)}$ $(i=0, 1, \ldots, n-3)$ сходятся к предельным функциям. Для максимумов и минимумов колеблющейся производной $y^{(n-2)}$ построены две амплитудные кривые, к которым при $\mu \to 0$ приближаются эти экстремумы. Для амплитудных кривых и предельных функций выводится определяющая их система уравнений, не содержащая параметра μ. С помощью амплитудных кривых вычисляется период колебаний $y^{(n-2)}$ с точностью до $O(\mu)$. Упомянутый выше результат распространен также на некоторые системы дифференциальных уравнений специального вида.

4. Уравнение колебаний системы с одной степенью свободы при медленном изменении силового поля и массы имеет вид

$$\frac{d}{dt}[m(\mu t)\dot{x}]+\mu f(\mu t, x, \dot{x})+Q(\mu t, x)=0. \tag{5}$$

Это уравнение заменой $\mu t=t'$ сводится к уравнению с малым параметром при старшей производной. При выполнении условия устойчивости решение (5) колеблется с медленно изменяющимися амплитудой и периодом. Как и в п. 3, строятся амплитудные кривые и вычисляется период. Ряд задач для подобных уравнений рассмотрен в работах Н. Н. Боголюбова, Н. М. Крылова, Ю. А. Митропольского.

5. Приводятся результаты ряда авторов, относящиеся к решению краевых задач для уравнений с малым параметром при старшей производной и к задаче о собственных значениях для уравнений

$$\mu Q_{2n}(y)+P_{2m}(y)=\lambda y,$$

где Q_{2n} и P_{2m} — линейные дифференциальные операторы порядков 2_n и 2_m, соответственно, $(n>m)$, касающиеся асимптотического поведения собственных значений и собственных функций при $\mu \to 0$.

А. Н. Тихонов (*Москва*). **Электромагнитные методы изучения слоистой среды.**

В. А. Фок (*Ленинград*). **Применение метода контурных интегралов к некоторым задачам теории диффракции.** 1. Строгое решение задачи диффракции от сферы в виде бесконечных рядов было получено Ми и Дебаем еще в 1908—1909 гг. Но эта форма решения оказалась в случае малых длин волн (малых по сравнению с радиусом сферы) практически не пригодной для расчетов.

Удобную для расчетов форму решения оказалось возможным получить только после перехода к представлению в виде контурного интеграла. Первый шаг в этом направлении был сделан Ватсоном в 1918 г. Следующий существенный шаг потребовал применения правильной асимптотики для подинтегральной функции. Для этого необходимо было выяснить, где находится главный участок интегрирования, и взять такую асимптотику (функции Эйри), которая давала бы малую погрешность именно на этом участке. Это было сделано в наших работах 1945—1946 гг. [1], [2], [3], где было получено выражение для множителя ослабления в виде контурного интеграла. Это выражение позволило проследить переход от света к тени через всю область полутени.

2. Другой подход к решению задачи диффракции на полупроводящем теле возможен на основе предельных условий Леонтовича. Здесь пренебрежения делаются уже в самой постановке задачи, что приводит к уравнению параболического типа (с мнимым коэффициентом при первой производной). В случае сферы оказывается, что если исходить из параболического уравнения и условий Леонтовича и не делать уже дальнейших пренебрежений, то контурный интеграл, дающий решение задачи, совпадает с интегралом, получаемым по методу суммирования рядов [5]. Это дает новое обоснование методу параболического уравнения и открывает возможность для дальнейших обобщений.

3. Одно из обобщений состоит в переходе от случая сферы к случаю поверхности произвольной формы (с конечной кривизной). В нашей работе 1945 г. [4] показано, что распределение токов на абсолютно проводящем теле вблизи границы геометрической тени выражается через универсальную функцию расстояния от границы тени, деленного на ширину области полутени. Для определения этой универсальной функции достаточно было решить задачу для выпуклого тела, на поверхности которого имелись бы точки с любыми заданными значениями главных радиусов кривизны. В качестве такого тела был взят параболоид вращения. При решении был применен метод суммирования рядов при помощи контурных интегралов [4].

4. Эти результаты работы 1945 г. были затем обобщены на случай конечной проводимости, причем были получены выражения не только для поля на поверхности, но и для поля вблизи поверхности тела [6]. Вывод был значительно упрощен применением метода параболического уравнения. Оказалось, что решение выражается через те же функции, что и в случае сферы. Контурный интеграл, представляющий эти функции, приобретает таким образом общее значение.

5. Полученное приближенное решение диффракционной задачи позволило выяснить ряд смежных вопросов: о связи законов отражения Френеля с законами диффракции [8] а также о диффракции Френеля от выпуклых тел (дффиракция в области конуса тени) [12]. Формулы, полученные первоначально для случая одной поляризации, были обобщены на случай произвольной поляризации [9]. Попутно были обобщены отражательные формулы и сравнены для освещенной области с диффракционными [10].

6. Другое направление, в котором метод контурных интегралов позволил сильно продвинуться вперед, состоит в учете, наряду с диффракцией, также и рефракции, т. е. в переходе к случаю неоднородной атмосферы. В предположении, что показатель преломления зависит только от высоты, оказалось возможным и в этом случае найти решение в виде контурного интеграла [7], и [11].

Дальнейшее исследование проходит существенно различно в зависимости от того, будет ли приведенный показатель преломления монотонной функцией от высоты (нормальная рефракция) или же в атмосфере имеется инверсия, так что образуются волноводы (сверхрефракция). Особенно интересен последний случай, поскольку геометрическая оптика не может дать здесь никаких указаний. Сила метода контурных интегралов проявляется тогда особенно отчетливо. В случае инверсии приближенное представление подинтегральной функции через функции Эйри становится недостаточным, и необходимо прибегнуть к представлению ее через функции параболического цилиндра. Таким путем удается получить приближенную формулу для дальности горизонта при наличии сверхрефракции [13]. Оказывается, что дальность горизонта логарифмически зависит от длины волны.

Разработка изложенных методов потребовала развития вычислительной стороны теории. Здесь много сделали мои сотрудники, особенно М. Г. Белкина, и Л. А. Вайнштейн, которые детально выяснили область практической применимости предложенных мною формул.

Лит.: Фок В. А., ДАН СССР, 46, № 8, (1945), 343—346. 2. Фок В. А., ЖЭТФ, т. 15, вып. 9, (1945), 479—496. 3. Фок В. А., Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности, М.—Л., 1946. 4. Фок В. А., ЖЭТФ, т. 15, вып. 12, (1945), 693—702. 5. Фок В. А. и Леонтович М. А., ЖЭТФ, т. 16, вып. 7, (1146), 557—573. 6. Фок В. А., Изв. АН СССР, сер. физ., т. 10, № 2, (1946), 171—186. 7. Фок В. А., Изв. АН СССР, сер. физ., т. 12, № 2, (1948), 81—97. 8. Фок В. А., Усп. физ. наук, т. 36, вып. 3, (1948), 308—327. 9. Фок В. А., ЖЭТФ, т. 19, вып. 10, (1949), 916—929. 10. Фок В. А., ЖЭТФ, т. 20, вып. 11, (1950), 961—908. 11. Фок В. А., Изв. АН СССР, сер. физ., т. 14, № 1, (1950). 12. Фок В. А., Усп. физ. наук, т. 43, вып. 4, (1951), 587—599. 13. Фок В. А., Приближенная формула для дальности горизонта при наличии сверхрефракции (печатается в журнале «Радиотехника и электроника»).

СЕКЦИЯ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Б. В. Гнеденко (*Киев*). **О некоторых задачах истории математики.** 1. О значении истории математики а) для целей выяснения общих закономерностей развития математики, б) для выявления общих перспектив ее последующего развития, в) для выявления методологических установок науки, г) для выяснения связей с другими науками и роли математики в истории культуры, д) для целей преподавания и воспитания.

2. Общая картина работ в области истории математики за период между II и III Всесоюзными математическими съездами: а) широкое развитие исследований по истории отечественной математики; б) попытки изучения развития отдельных математических дисциплин; в) значительное внимание изданию трудов классиков математики; г) появление отдельных исследований по истории математики в Вавилоне, древней Греции, в Средней Азии, Китае; д) организация специального апериодического органа истории математики—историко-математических исследований.

3. О некоторых общих задачах, стоящих перед советскими историками математики. До настоящего времени отсутствует сводное произведение, в котором были бы четко высказаны общие идеи советской истории математики и с этих позиций проанализированы основные этапы развития математики. До сих пор нет сводного произведения по истории математики в России. Отсутствуют также фундаментальные сочинения, посвященные истории отдельных математических дисциплин. Недостаточное внимание уделялось изучению узловых моментов истории математики. В частности, до сих пор нет полного выяснения причин развития геометрии в древней Греции как дедуктивной науки. Чрезвычайно медленно ведутся работы по изучению истории математики в XIX и XX вв. В то же время для современной математики такого рода работы представляли бы особый интерес. Отсутствуют даже общего характера статьи, посвященные развитию математики в целом ряде стран—Индии, Японии и др. Не исследованы связи, существовавшие между Россией, Польшей, Чехословакией и другими пограничными странами, в отношении распространения математических знаний. Плохо поставлено изучение архивов, относящихся к истории математики.

4. Об учебнике по истории математики. Особое внимание необходимо обратить на то, что до сих пор не создан учебник истории математики. В таком учебнике на первое место должно быть выдвинуто изложение истории развития математических идей на фоне и в связи с изложением фактологической части. В учебнике история математики должна быть доведена до наших дней и достаточно подробно изложена борьба идей и различные методологические подходы к построению основ математики. Быть может, следовало бы обратиться с предложением в Министерство высшего образования и в Академию наук СССР и академии наук союзных республик об организации коллектива авторов для написания такого учебника.

5. Об издании произведений классиков математики. Особого внимания заслуживает также вопрос об издании произведений классиков математики. К сожалению, нередко издание собраний сочинений выдающихся ученых прошлого растягивается на многие годы: так, собрание сочинений М. В. Остроградского, предпринятое в 1937 г., до сих пор не завершено. Необходимо создать общий план издания трудов классиков

науки и привлечь к выполнению этого плана возможно более широкий круг математиков и историков матемитики.

6. О некоторых организационных мероприятиях. В связи с тем, что появление историко-математических исследований сыграло и играет очень большую организующую роль в развитии исследований в области истории математики, целесообразно превратить их в периодический журнал. Такой журнал смог бы шире охватить основные направления истории математики, организовать дискуссии, печатать обзоры, работы методологического характера, библиографию исследований в области истории науки, заблаговременно печатать календарь предстоящих математических юбилеев (что весьма существенно для общественности). Историков математики немного и поэтому нам необходимо создать координирующий центр, который организовывал бы привлечение имеющихся сил на решение основных задач.

7. О кадрах. Историей математики должны заниматься сами математики. Поэтому уже в университетах и désинститутах должен воспитываться вкус к этой научной дисциплине, а с этой целью в этих учебных заведениях должны читаться обязательные серьезные курсы истории математики, а также читаться специальные курсы и проводиться специальные семинары. Для лиц, желающих работать в области истории науки, должны организовываться занятия по греческому, латинскому, арабскому и некоторым другим языкам.

А. П. Норден (*Казань*). **Н. И. Лобачевский.** Взгляды Лобачевского на основания геометрии формируются задолго до открытия неэвклидовой геометрии. Они отражены в курсах его лекций 1816—1817 гг. и в обозрениях преподавания 1822—1824 гг.

Лобачевский считает неудовлетворительными известные в его время изложения начал геометрии. Им недостает строгости и ясности, а их предпосылки не приведены к наименьшему числу.

Лобачевский делит понятия геометрии на «первые» или «приобретенные», т. е. основные, и «произведенные» или «составные». Исходя из материалистического тезиса об опытном происхождении всякого познания, в том числе и математического, Лобачевский считает, что первые понятия приобретаются в природе посредством чувств, а составные понятия определяются через первые. Вследствие этого основные положения геометрии, касающиеся первых понятий, устанавливаются непосредственным наблюдением материальных тел и их движений, а положения, характеризующие производные понятия, дедуцируются из основных положений.

Считая, что постулат о параллельных говорит о произведенных понятиях, Лобачевский первоначально пытался вывести его из положений абсолютной геометрии, но в начале двадцатых годов XIX в. он убедился в невозможности такого вывода и необходимости опытной проверки постулата. Однако по своей сложной и абстрактной природе постулат не может быть проверен простым наблюдением. Его проверка требует постановки сложного эксперимента, опирающегося на математическую теорию, которая сама во избежание порочного круга, не может опираться на проверяемый постулат.

Этой теорией и была «воображаемая» геометрия, которую Лобачевский открыл в середине двадцатых годов XIX в., доведя ее до построения тригонометрии и показав, что геометрия Эвклида является ее предельным случаем и выражает приближенно свойства фигур, размеры которых достаточно малы. Опираясь на данные современной ему астрономии, Лобачевский показывает затем, что геометрия Эвклида дает хорошее приближение к действительности даже для фигур астрономических масштабов и вследствие этого может считаться «как бы строго доказанной».

Тем не менее Лобачевский не считал окончательно решенным вопрос о геометрии реального пространства и не исключал возможности того, что уточненные наблюдения будущего покажут его неэвклидову природу. Он допускал даже возможность различных геометрий в различных областях пространства и их зависимость от сил, действующих в этих областях.

Значение материалистических воззрений Лобачевского для открытия им неэвклидовой геометрии становится особенно ясным при сопоставлении с историей того же открытия у Гаусса. Находясь под сильным влиянием концепции априоризма, Гаусс в течение 25 лет не мог освободиться от сомнений в возможности неэвклидовой геометрии, хотя владел ее начальными фактами еще в 1792 г.

В свою очередь, открытие неэвклидовой геометрии имеет важное философское значение, так как оно опровергает мнение о единственности и неизменности эвклидовой геометрии, на которое опирался Кант, и утверждает, что истины геометрии априорны, а пространство и время субъективны.

Значение открытия Лобачевского в истории математики состоит прежде всего в том, что его работы дают первый пример аксиоматических исследований.

Он сводит доказательство независимости пятого постулата к построению системы, основанной на его отрицании, ставит вопрос о непротиворечивости своей геометрии и близко подходит к его решению на пути ее аналитической интерпретации (в «Воображаемой геометрии»). Метод интерпретации одной геометрической системы внутри другой тоже намечен Лобачевским при рассмотрении геометрии на предельной поверхности.

Открытие Лобачевского положило начало разработке геометрий многочисленных и разнообразных обобщенных пространств. Эти геометрии строятся, как правило, на аналитической основе. Такой способ построения впервые был осуществлен Риманом, но Лобачевский близко подошел к нему в своей «Воображаемой геометрии».

Теории обобщенных пространств находят свое приложение при изменении различных образов эвклидова пространства (поверхностей, конгруэнций прямых и сфер и т. д.) с точки зрения геометрии различных групп преобразований. Еще более существенны их приложения в алгебре и анализе (теория инвариантов, теория непрерывных групп, автоморфные функции, вариационное исчисление, аналитические функции многих переменных и т. д.). Первое такое приложение было указано самим Лобачевским, который использовал свою геометрию для вычисления интегралов.

Идеи Лобачевского сыграли весьма важную роль в подготовке почвы для теории относительности. Пространство Лобачевского дает картину фазового пространства специального принципа относительности. Общий принцип относительности опирается на теорию обобщенных пространств и предположение о зависимости геометрии от сил, действующих в пространстве, которое тоже было предуказано Лобачевским.

К. А. Рыбников (*Москва*). **О математических рукописях К. Маркса.** В докладе дается характеристика тома «Архива К. Маркса и Ф. Энгельса», подготовленного к печати в Институте марксизма-ленинизма при ЦК КПСС. Том содержит математические рукописи К. Маркса. Подавляющее большинство их будет опубликовано впервые.

В первой части доклада конкретно показывается ход математических занятий Маркса и последовательное развитие его идей. Попутно дается обзор математических книг, бывших в распоряжении Маркса.

Вторая часть доклада посвящается значению математических работ Маркса. В этой части рассматриваются:

а) связь математических занятий Маркса с общим направлением его естественнонаучных исследований;

б) идеи Маркса о развитии математических исчислений и алгоритмов;

в) взгляды Маркса на роль и характер математической символики;

г) решение Марксом проблемы соотношения логической структуры математики и исторического хода ее развития;

д) значение работ К. Маркса для раскрытия диалектического характера развития математики и материалистического понимания ее основ.

Н. И. Симонов (*Москва*). **Исследования Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений и их приложений.** Изучение в оригинале трудов Л. Эйлера показывает, что содержание эйлеровского научного наследия в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными значительно богаче указываемого в специальной и историко-математической литературе.

В работах Эйлера по обыкновенным дифференциальным уравнениям и их приложениям имеются исследования о системах линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами с произвольным числом неизвестных функций, примеры задачи с начальными условиями в случае неединственности ее решения.

В работах Эйлера о методах приближенного интегрирования дифференциальных уравнений имеется ряд результатов по усовершенствованию метода ломаных, применению в отчетливой форме для приближенного интегрирования нелинейных уравнений метода малого параметра и тригонометрических рядов.

В работах Эйлера, связанных с уравнениями в частных производных, содержатся построение для уравнений первого порядка решений типа общего интеграла по современной терминологии и результаты, развивающие аналитическую сторону метода характеристик (в частности, вывод общих формул преобразования линейных уравнений второго порядка). С помощью преобразования неизвестных функций исследованы некоторые линейные системы уравнений второго порядка (обобщенно-гиперболические по современным определениям).

На дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений творчество Эйлера оказало по ряду направлений более глубокое воздействие, чем то, которое указывается в историко-математических обзорах.

В вопросах о частных и особых интегралах обыкновенных дифференциальных уравнений, о методе вариации произвольных постоянных, линейных системах уравнений второго порядка, об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка имеется непосредственная преемственность эйлеровских результатов в творчестве Лагранжа. Результаты Эйлера о методе интегрирующего множителя послужили источником исследования нелинейных уравнений Миндингом и С. Ли. Развитие Лапласом «метода каскадов» и метода решения уравнений с частными производными посредством интегралов, зависящих от параметра, имело основание в работах Эйлера. Развитие в XIX в. методов приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (Рунге и др.) проводилось в направлении, указанном Эйлером.

В научном наследии Эйлера имеются также некоторые методы и отдельные результаты, оставшиеся малоизвестными. Одним из таких методов является применение Эйлером алгоритма непрерывных дробей для исследования уравнения Риккати. Интерес Эйлера к этому уравнению был связан не только с рядом задач геометрии и механики, но и с применением этого уравнения для решения линейного уравнения с частными производными. Последнее в дальнейшем приобрело важное значение в газовой динамике.

Метод непрерывных дробей представляет интерес и в наши дни в связи с тем, что алгоритм непрерывных дробей достаточно удобен для современных средств машинной математики.

Малоизвестен также и эйлеровский метод, могущий быть назван «методом канонических преобразований». Он был применен Эйлером для исследования линейного уравнения второго порядка, частными случаями которого являются уравнения Лежандра, Чебышева, Эрмита и Гаусса.

Для всего творчества Эйлера в данной области в высшей степени характерно единство теории и практики.

Истоки теоретических открытий Эйлера содержатся в его исследованиях задач математического естествознания. Недостаточная изученность в имевшейся историко-математической литературе исследований Эйлера по теории дифференциальных уравнений была в значительной степени следствием неправильного общего подхода, при котором многие теоретические результаты Эйлера изучались вне связи с его достижениями в математическом естествознании. Известное значение имело также отсутствие до настоящего времени полного собрания его сочинений.

В. И. Смирнов (*Ленинград*). **Переписка Леонарда Эйлера.** 1. Общий обзор той части переписки, которая находится в Архиве Академии наук СССР.

2. Новые сведения о письмах, хранящихся в других местах.

3. Содержание тех писем Эйлера из Архива Академии наук СССР, которые до настоящего времени не были опубликованы.

А. П. Юшкевич (*Москва*) **и Г. Ф. Рыбкин** (*Москва*). **О новых работах в СССР по истории математики.** 1. В 30-е годы нашего века исследования по истории математики в основном были связаны с изучением творчества некоторых классиков математики и изданием их трудов. Особое внимание уделялось математикам XVII—XVIII вв. Незадолго до войны начаты были работы по истории отечественной математики.

2. Широкий размах работа по истории математики приобретает после Великой отечественной войны. Это связано с рядом научно-организационных мероприятий, с изданием большой литературы, в том числе регулярных ежегодников «Трудов Института истории естествознания» и «Историко-математических исследований». Основное значение имели указания ЦК КПСС по идеологическим вопросам и повышение интереса советской интеллигенции к истории отечественной культуры и науки в ее взаимосвязях с мировой культурой и наукой.

В 1945—1955 гг. советские ученые получили ряд результатов в нескольких направлениях истории математики. Эти результаты рассмотрены в настоящем докладе преимущественно в последовательности исторического развития.

3. Наряду с некоторыми вопросами истории математики в древних Египте и Вавилоне истории греческой математики также было уделено значительное внимание. Новоосвещение получили «Начала» Эвклида, в частности, общая теория отношений и арифметические книги, а также метод исчерпывания, интеграционные и дифференциальные методы Архимеда.

4. Исследование математической литературы на арабском языке, в частности, ранее мало известных трудов Омара Хайяма и Джемшида ал-Каши, привело к установлению новых фактов в истории учения об отношениях и о числе, теории параллельных линий и т. д. Была разработана новая концепция математики народов средневекового Востока.

5. Впервые были установлены основные факты в развитии математики в Грузии и Армении эпохи средних веков.

Изучение старинных русских рукописей привело к пересмотру прежних взглядов (В. В. Бобынин) на уровень математических знаний в России до начала XVIII в. Был подробно изучен прогресс математической культуры в России VXIII в.

6. В истории математики XVII—XVIII вв. особый интерес вызывали у советских историков науки узловые проблемы и основные направления творчества крупнейших математиков этого времени. Большое внимание было уделено работам Эйлера по анализу и специально по дифференциальным уравнениям.

Ряд работ был посвящен истории проблемы обоснования математического анализа до эпохи Коши.

В самое последнее время были детально изучены математические рукописи К. Маркса, результатом чего явился новый подход к истории оснований анализа.

7. Значительно глубже и многостороннее было изучено научное наследие крупнейших русских математиков XIX в. Удалось установить целый ряд ранее неизвестных открытий или же подробнее осветить достижения Лобачевского, Остроградского, Петерсона, Ляпунова и др. Было обнаружено много новых материалов о жизни и деятельности названных и других русских ученых.

Изучение творчества менее известных математиков (Андреева, Сухоцкого, Суворова и др.) раскрыло новые стороны развития математики в русских провинциальных центрах.

8. Были сделаны первые шаги в историческом освещении советского периода в развитии математики, в частности, творчества Н. Н. Лузина и ряда других выдающихся советских ученых.

9. Несколько работ было посвящено истории отдельных математических дисциплин или проблем (специальные функции, аналитические функции, алгебра, теория делимости).

10. Советские историки математики не охватили еще целого ряда областей своей науки и эпох. Очень мало работ было посвящено истории математики новейшего времени, истории главных математических дисциплин, развитию основных понятий

математики, проблемам методологии. Эти и другие пробелы ставят перед советскими учеными ряд важных и неотложных задач.

С. А. Яновская (*Москва*). **Из истории аксиоматического метода**. 1. Для правильной оценки истории аксиоматического метода особое значение имеют: а) марксистско-ленинское положение о том, что принципы—это не исходный пункт науки, а ее заключительный результат, и б) марксово «оборачивание метода», примененное им к выяснению сущности дифференциального исчисления и закономерностей его исторического развития. В свете этих положений в докладе рассматривается периодизация истории аксиоматики и критикуются попытки идеалистических извращений этой истории.

2. В связи с историей возникновения аксиоматики рассматриваются: а) ряд вопросов, связанных с аристотелевой теорией доказательства; б) роль таких определений, как определения «точки», «прямой», «отношения» и т. п. в «Началах» Эвклида; в) вопрос о том, какими принципами мог руководствоваться Эвклид при выборе аксиом, сформулированных в его системе, и чем можно объяснить то обстоятельство, что некоторые аксиомы, которыми он пользуется, прошли мимо его внимания; г) пользовался ли Эвклид фактически каким-либо принципом, эквивалентным принципу полной математической индукции, и др. Предлагается гипотеза, объясняющая, почему геометрия уже в «Началах» трактуется аксиоматически, между тем как общеупотребительная система аксиом арифметики была сформулирована лишь Пеано.

3. В применении к истории аксиоматики XVII—XVIII столетий обращается внимание на то, что в XVII в. аксиомы формулируются для оптики (Декарт), для небесной механики (Ньютон) и лишь затем Вольф и его ученики пытаются сформулировать аксиомы для всех вообще математических дисциплин. В этой связи анализируются некоторые системы аксиом, содержащиеся в учебниках московского математика Аничкова.

4. Особого внимания заслуживает попытка Н. И. Лобачевского избежать трудностей, связанных с доказательством непротиворечивости его геометрии, посредством замены системы аксиом геометрии системой явных определений.

5. История современного аксиоматического метода и связанной с ним проблематики (проблемы непротиворечивости, полноты и независимости аксиом) особенно поучительна с методологической точки зрения. На этапах этой истории—от классических «Оснований геометрии» Гильберта до современных аксиоматических систем теории множеств и конструктивных направлений в вопросах обоснования математики—с особенною отчетливостью видно, насколько и здесь оказываются верными ленинские положения о том, что современная наука рождает диалектический материализм, но эти роды болезненные, они дают и мертвые продукты, которые науке в ее развитии приходится отбрасывать.

РЕЗЮМЕ
СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

А. О. Гельфонд (*Москва*). **Некоторые новые результаты в теории дзета-функции.** В докладе дана краткая характеристика как аналитических методов в теории дзета-функции, так и элементарных методов в области распределения простых чисел и элементарных оценок для распределения нулей дзета-функции и L-рядов.

Более подробно рассмотрена идея элементарного подхода к оценкам дзета-функции и L-рядов в критической полосе с помощью тождеств типа А. Сельберга.

Н. М. Коробов (*Москва*). **Рациональные тригонометрические суммы с показательными функциями, их обобщения и приложения.** 1. Возможность вычисления широкого класса сумм вида

$$\sum_{x=1}^{\tau} e^{2\pi i \frac{aq^x}{m}},$$

где $q \geqslant 2$, $(m, q)=1$, $(a, q)=1$ и τ — период функции q^x по модулю m.

2. Возможность получения с помощью метода И. М. Виноградова нетривиальных оценок сумм вида

$$\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{aq^x}{m}}$$

для значений N, весьма малых по сравнению с длиной периода τ.

3. Равномерность распределения знаков в периоде и в малой части периода дробей вида $\frac{a}{m}$ при записи их в q-ичной системе счисления.

4. Неулучшаемые оценки сумм вида

$$\sum_{x=1}^{\tau} e^{2\pi i \frac{\psi(x)}{p}},$$

где $\psi(x)$ — рекуррентная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\psi(x) = a_1 \psi(x-1) + \ldots + a_n \psi(x-n) \qquad (a_n \text{ — целые, } n \geqslant 1)$$

и где p — простое, а τ — период $\psi(x)$ по модулю p.

5. Возможность применения метода И. М. Виноградова для получения нетривиальных оценок сумм вида

$$\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{\psi(x)}{m}}$$

для широкого класса значений m при N малых по сравнению с периодом функции $\psi(x)$ по модулю m.

6. Равномерность распределения степенных вычетов и невычетов чисел, принадлежащих данному показателю, и первообразных корней в периоде и в части периода последовательностей вида

$$\psi(1), \quad \psi(2), \ \ldots, \ \psi(x), \ \ldots .$$

Ю. И. Манин (*Москва*). **О сравнениях третьей степени с двумя неизвестными по простому модулю.** Дается элементарное (использующее лишь простейшие свойства сравнений) доказательство теоремы Хассе о том, что число решений N_p сравнения

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p$$

($p > 3$ — простое) удовлетворяет неравенству

$$|N_p - p| < 2\sqrt{p}.$$

И. И. Пятецкий-Шапиро (*Москва*). **Мультипликативные формулы в теории модулярных групп.** Пусть S — матрица неопределенной квадратичной формы с рациональными коэффициентами. Как известно, единицами квадратичной формы называются такие целочисленные матрицы U, что $U'SU = S$. Зигель заметил, что группу единиц неопределенной квадратичной формы можно интерпретировать как дискретную группу преобразований некоторого симметрического пространства. Им было дано построение фундаментальной области для этой группы и показано, что ее объем конечен (см. [1]).

Одна из основных задач аналитической теории квадратичных форм, построенной в основном Зигелем, — вывод мультипликативных формул для вычисления объемов фундаментальных областей (см. [2]).

Повидимому, аналогичные формулы справедливы для всех модулярных групп (определение модулярных групп см. в [4]).

Задача настоящего сообщения — вывод этой формулы для модулярных групп, соизмеримых с модулярной группой Зигеля (см. [3]).

Пусть R — кососимметрическая рациональная матрица. Условимся целочисленную матрицу U называть единицей R, если $U'RU = R$.

Пусть R_1 и R_2 — две рациональные кососимметрические матрицы. Рассмотрим уравнение

$$M'R_1M = R_2. \tag{1}$$

Два целочисленных решения уравнения (1) M_1 и M_2 условимся называть ассоциированными, если $M_2M_1^{-1} = U$ — единица R_1. Обозначим через $\alpha(R_1, R_2)$ число неассоциированных целочисленных решений уравнения (1).

Пусть K означает поле вещественных чисел или поле p-адических чисел. Через $\alpha_K(R_1, R_2)$ мы обозначим «число решений» уравнения (1) в поле K. Доказываемая формула выглядит так:

$$\alpha(R_1, R_2) = \prod_K \alpha_K(R_1, R_2), \tag{2}$$

где K пробегает все p-адические поля и поле вещественных чисел.

Определение $\alpha_K(R_1, R_2)$ в случае, когда K — поле вещественных чисел. Пусть Q — некоторая область в пространстве кососимметрических матриц порядка $2n$ с вещественными элементами конечного объема $v(Q)$. Обозначим через B совокупность всех вещественных матриц X, для которых $X'R_1X \in Q$. Очевидно, что область B переходит в себя при преобразовании $X \to UX$, где U — единица матрицы R. Обозначим через $\overline{B}$ фундаментальную область в B относительно группы единиц матрицы R. Предел отношения $v(\overline{B})/v(Q)$, когда область Q стягивается к R_2, и есть $\alpha_K(R_1, R_2)$. Аналогично определяется $\alpha_K(R_1, R_2)$ в случае, когда K — поле p-адических чисел. Именно, пусть Q — некоторая область в пространстве кососимметрических матриц порядка $2n$ с целыми p-адическими элементами. Обозначим через B совокупность всех целых p-адических матриц X порядка $2n$, для которых $X'R_1X \in Q$. Предел отношения $v(B)/v(Q)$, когда область Q стягивается к R_2, мы обозначим через $\alpha_K(R_1, R_2)$ ($v(B)$ и $v(Q)$ означают p-адические объемы B и Q).

Отметим, что в случае $R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ формула (2) была дана Зигелем (см. [3]).

Лит.: 1. Siegel, Abh. Math. sem. Han. Univ., 13, (1940), 209—239. 2. Siegel, Ann. of Math. 36, (1935), 527—606. 3. Siegel, Amer. I. Math., 65, (1943), 1—86. 4. Пятецкий-Шапиро, ДАН СССР, **106**, (1956), 973—976.

СЕКЦИЯ АЛГЕБРЫ

С. Д. Берман (*Москва*). **Представления разрешимых групп.** Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Групповая алгебра группы G над полем K обозначается через $R\ (G,\ K)$.

Пусть G—абелево расширение группы H, K—алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок G.

Показано, как построить полную систему минимальных идемпотентов центра $R\ (G,\ K)$ и полную систему попарно ортогональных минимальных идемпотентов $R\ (G,\ K)$, если такие системы известны в $R\ (H,\ K)$.

Эта конструкция дает возможность получить явные формулы для характеров и представлений произвольной разрешимой группы, в которой задан нормальный ряд с абелевыми факторами.

Если G—сверхразрешимая группа (разрешимая группа, факторы главного ряда которой имеют простой порядок), то исследование полной системы минимальных идемпотентов алгебры $R(G,\ K)$ (K—алгебраически замкнутое поле с характеристикой, не делящей порядок G) позволяет доказать, что степени абсолютно неприводимых представлений группы G совпадают с индексами некоторых ее подгрупп.

На основании этого результата устанавливаются необходимые и достаточные условия изоморфизма вполне приводимых групповых алгебр $R(G,\ K)$ и $R\ (H,\ K)$ двух сверхразрешимых групп G и H при следующих предположениях:

1) K—алгебраически замкнутое поле;
2) K—произвольное поле положительной характеристики;
3) G и H—p-группы ($p\neq 2$), а K—произвольное поле.

З. И. Боревич (*Ленинград*) и **Д. К. Фаддеев** (*Ленинград*). **К теории гемологий в группах.** Дается построение теории гомологий в группах на основе рассмотрения фундаментального комплекса для группы. Для конечной группы операторов фундаментальный комплекс строится продолженным в обе стороны, что дает возможность уложить в единую схему теорию верхних и нижних гомологий. Для случая, когда операторы действуют тождественно, даются формулы, выражающие верхние и нижние группы гомологий в произвольной группе коэффициентов через группы гомологий в группе целых чисел.

Дается определение перенесения группы гомологий с подгруппы группы операторов на всю группу. Устанавливается связь этого понятия с понятием нормы, появляющимся в конкретных вопросах теории полей и алгебр.

Л. М. Глускин (*Харьков*). **Полугруппы непрерывных деформаций.** Пусть M — шар в n-мерном эвклидовом пространстве, D — полугруппа всех непрерывных взаимно однозначных деформаций M в свои подмножества. Обозначим через A подмножество полугруппы D, состоящее из всех таких деформаций f, что границы множеств M и fM не имеют общих точек. Множество A всюду плотно в D и является минимальным идеалом полугруппы D. Для любых элементов $d\in D$,

$a \in A$ в A разрешимо уравнение $dx=a$. Все элементы идеала A — бесконечного порядка.

Теорема 1. Идеал A не обладает нетривиальными гомоморфизмами (т. е. является простой полугруппой).

Пусть φ — гомеоморфизм M на себя. Отображение α,

$$\alpha f = \varphi^{-1} f \varphi, \tag{1}$$

каждой из полугруппы D и A на себя является, очевидно, их автоморфизмом.

Теорема 2. Всякий автоморфмзм α полугрупп D и A имеет вид (1).

Аналогичное утверждение имеет место и для широкого класса других полугрупп непрерывных преобразований.

В. М. Глушков (*Свердловск*). **Топологические группы и алгебры Ли.** В докладе рассматриваются два основных круга вопросов. Первый из них связан с локальной структурой произвольных локально бикомпактных групп, с описанием строения связных локально бикомпактных групп и с использованием для этой цели некоторых классов бесконечномерных локально конечных вещественных алгебр Ли.

Второй круг вопросов, освещаемых в докладе, касается строения вполне несвязных некоммутативных бикомпактных групп. Основное внимание уделяется построенной автором теории нильпотентных бикомпактных групп с конечными p-адическими рядами, т. е. такими нормальными рядами, все факторы которых изоморфны аддитивной группе целых p-адических чисел по какому-либо фиксированному простому числу p. Изучение таких групп в значительной мере сведено к изучению конечномерных нильпотентных алгебр Ли над полем p-адических чисел.

Н. П. Гольдина (*Москва*). **Некоторые свойства свободных нильпотентных групп.** Изучаются члены нижнего центрального ряда свободной n-ступенно нильпотентной группы.

Для каждого члена нижнего центрального ряда установлен его класс нильпотентности, найдена максимальная содержащаяся в нем свободная нильпотентная подгруппа ${}_lA$ того же класса. Сам l-й член нижнего центрального ряда оказался нормальным делителем, порожденным этой подгруппой ${}_lA$ в группе $G: {}_lG = {}_l\bar{A}$.

Изучением свойств членов нижнего центрального ряда свободной группы занимались Ф. Холл [1], Э. Витт [2], М. Холл [5], Мейер-Вундерли [6].

Доказано, что l-й член ${}_lG$ нижнего центрального ряда свободной n-ступенно нильпотентной группы G является нильпотентной группой класса $\left[\frac{n+l-1}{l}\right]$. Все члены ${}_lG$ для $l > \frac{n-1}{2}$ — свободные абелевы группы.

Если ранг группы G конечен, то ${}_lG$ — свободная абелева группа ранга $m_l + m_{l+1} + \ldots + m_{n-1}$, где m_i — ранг ${}_iG/{}_{i+1}G$.

Если $a \subset {}_kG$, $a \not\subset {}_{k+1}G$, $k \leqslant \frac{n-1}{2}$, то нормализатором N_a элемента a служит свободная абелева подгруппа $N_a = \{\bar{a}\}\, x_{n-k}\, G$, $\{\bar{a}\}$ — бесконечная циклическая подгруппа, ее образующий элемент $\bar{a}$ специальным образом строится по заданному элементу a.

Если $a \subset {}_kG$, $k > \frac{n-1}{2}$, то нормализатором N_a элемента a служит свободная абелева подгруппа ${}_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}G$.

Отсюда следует теорема Витта [2]: центром свободной n-ступенно нильпотентной группы G является предпоследний член ее нижнего центрального ряда.

Доказаны следующие предложения.

Теорема 1. Подгруппа ${}_lA$, порожденная базисными коммутаторами веса l в свободной n-ступенно нильпотентной группе G, является свободной нильпотентной подгруппой класса $\left[\frac{n+l-1}{l}\right]$.

Теорема 2. Пусть G—свободная n-ступенно нильпотентная группа. Для того чтобы некоторые элементы b_β гуппы G порождали в ней свободную нильпотентную подгруппу класса $\left[\frac{n+l-1}{l}\right]$, $l \leqslant n-1$, свободными образующими которой они бы являлись, необходимо и достаточно, чтобы все они содержались в ${}_lG$ и были линейно независимы по модулю ${}_{l+1}G$.

Для подгрупп свободной n-ступенно нильпотентной группы доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 7 работы О. Н. Головина и Н. П. Гольдиной [4].

Теорема 3. В свободной n-ступенно нильпотентной группе G каждая подгруппа B порождается упорядоченной системой подгрупп $B=\{B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}\}$, где B_l—свободная $\left[\frac{n+l-1}{l}\right]$ ступенно нильпотентная группа ранга $\rho_l \leqslant m_l$, m_l—ранг ${}_lG/{}_{l+1}G$, $l=1, 2, \ldots, n-1$. Для групп B_i, $i=1, 2, \ldots, n-1$, выполняется соотношение $(B_i, B_j) \subseteq B_{i+j}$.

Для свободной группы F описано конечное число тождественных преобразований записи элемента через образующие, позволяющее для произвольного элемента $a \subset F$ узнать, принадлежит ли он n-му члену нижнего центрального ряда этой группы.

Тем самым построен конкретный алгоритм для решения проблемы тождества в свободной n-ступенно нильпотентной группе.

Лит.: 1. Hall P., Proc. Lond. Math. Soc., 36, (1934). 2. Witt E., J. reine und angew. Math., 177, (1937). 3. Мальцев А. И., Матем. сб., 37, (1955). 4. Головин О. Н. и Гольдина Н. П., Матем. сб., 37, (1955). 5. Hall M., Proc. Amer. Math. Soc., 1, (1950). 5. Meier-Winderly H., Comm. Math. Helv., 26, 1, (1952).

А. А. Зыков (*Москва*). **Об одной многочленной характеристике линейных комплексов.** Под (линейным) комплексом мы понимаем неориентированный граф. Если комплекс L неполный, т. е. содержит хотя бы одну пару несмежных вершин a, b, то применительно к данной паре определим следующие операции, не изменяющие смежностей остальных вершин комплекса L:

α) к L добавляется ребро ab;

β) вершины a и b заменяются одной, смежной с теми из оставшихся вершин комплекса L, которые были смежны по крайней мере с одной из вершин a, b;

γ) вершины a и b заменяются одной, смежной с теми из оставшихся вершин L, которые были смежны как с a, так и с b;

δ) одна из вершин a, b удаляется (вместе с идущими в нее ребрами);

λ) обе вершины a, b удаляются.

Результаты этих операций обозначим, соответственно, через $L\alpha(a, b)$, $L\beta(a, b)$, $L\gamma(a, b)$, $L\delta(\underline{a}, b)$ (удалена a), $L\delta(a, \underline{b})$ (удалена b), $L\lambda(a, b)$.

Пусть $\mathfrak{R}$—коммутативное кольцо, порождаемое элементами 1, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$. Каждому комплексу L поставим в соответствие многочлен $P_L(z)$ над $\mathfrak{R}$ так, чтобы выполнялись условия:

А) если L—полный комплекс с числом вершин n, то $P_L(z)=z^n$;

Б) если L—неполный комплекс и a, b—какая-нибудь пара его несмежных вершин, то

$$P_L(z)=\alpha P_{L\alpha(a, b)}(z)+\beta P_{L\beta(a, b)}(z)+\gamma P_{L\gamma(a, b)}(z)+\delta P_{L\delta(\underline{a}, b)}(z)+$$
$$+\delta P_{L\delta(a, \underline{b})}(z)+\lambda P_{L\lambda(a, b)}(z).$$

Для определения однозначности $P_L(z)$ образующие $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ кольца $\mathfrak{R}$ должны быть связаны некоторыми соотношениями; например, в число таких соотношений входят $(\alpha-1)^2\beta=0$, $\alpha^2(\alpha-1)^2\gamma=0$ и др. Необходимого и достаточного условия однозначности найти пока не удалось, но, повидимому, трудность здесь не принципиальная. В качестве достаточного условия можно указать следующее: произведение каждой из величин $(\alpha-1)\beta$, $\alpha(\alpha-1)\gamma$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, $(\alpha-1)\lambda-(\gamma+\delta)\delta$ на каждую из величин $\alpha-1$, $\beta+\gamma+2\delta$, λ равно нулю. В частности, при $\alpha=\beta=1$, $\gamma=\delta=\lambda=0$ многочлен $P_L(z)$ является распределительным, а при $\alpha=\beta=\gamma=0$, $\delta=1$, $\lambda=-1$ $P_L(1+x)$, как многочлен от x, является размерностным (см. [1], гл. 2, § 5, и гл. 3, § 2). Если $\alpha=\beta=\delta=\lambda=0$, $\gamma=1$, то $P_L(z)=z^k$, где k — количество простых сомножителей L.

Для многочлена $P_L(z)$ имеет место следующий принцип суперпозиции. Пусть все вершины комплекса L распределены по m классам и пусть $L_1, L_2, \ldots, L_m$ — подкомплексы комплекса L с вершинами из соответствующих классов, причем для любых двух подкомплексов L_i и L_j либо все вершины комплекса L_i смежны со всеми вершинами комплекса L_j, либо никакая вершина комплекса L_i не смежна ни с какой вершиной комплекса L_j. Если

$$P_{L_i}(z)=r_0z^l+r_1z^{l-1}+\ldots+r_{l-1}z+r_l \qquad (r_0, \ldots, r_l \in \mathfrak{R})$$

и $L^{k,i}$ означает результат замены в комплексе L подкомплекса L_i полным k-вершинным комплексом с сохранением смежностей подкомплексов друг с другом в целом, а также смежностей внутри каждого из остальных подкомплексов ($L^{0,i}$ — результат удаления L_i из L), то

$$P_L(z)=r_0P_{L^{l,i}}(z)+r_1P_{L^{l-1,i}}(z)+\ldots+r_{l-1}P_{L^{1,i}}(z)+r_lP_{L^{0,i}}(z).$$

Отсюда, в частности, вытекает мультипликативное свойство для распределительного и размерностного многочленов, установленное в работе [1].

Лит.: 1. Зыков А. А., Матем. сб., 24 (66): 2, (1949), 163—188.

Н. Ф. Сесекин (*Свердловск*). **О квазиоператорных группах.** Пусть $G=\{a, b\ldots\}$ — группа и $T=\{\alpha, \beta,\ldots\}$ — кольцо. Группа G называется квазиоператорной над кольцом T, если для любых $a\in G$ и $\alpha\in T$ определен элемент $a^\alpha\in G$, причем выполняются следующие аксиомы:

1) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$;

2) $a^\alpha, a^\beta=a^{\alpha+\beta}$;

3) $a^\varepsilon=a$, где ε — единица кольца T;

4) $(bab^{-1})^\alpha=ba^\alpha b^{-1}$;

5) $(ab)^\alpha=\varphi_\alpha(a, b)\,a^\alpha b^\alpha$, где элемент $\varphi_\alpha(a, b)$ группы G принадлежит коммутанту допустимой подгруппы из G, порожденной элементами a и b.

Любая группа является квазиоператорной над кольцом целых чисел. Абелева квазиоператорная группа G является операторной в обычном смысле.

В докладе исследуются абсолютные (не зависящие от свойств кольца T и вида функции $\varphi_\alpha(a, b)$ свойства квазиоператорной группы. Изучаются также группы при следующих ограничениях на кольцо T:

1) T есть область целостности,

2) в T выполняется условие обрыва цепей делителей,

3) каждый простой в T идеал является максимальным.

СЕКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. М. Вайнберг (*Москва*). **О положительных решениях некоторых нелинейных интегральных уравнений.** Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$F(x, u(x)) = \int_B K(x, y, u(y))\, dy + f(x) \qquad (1)$$

в предположении непрерывности вещественных функций вещественных аргументов $F(x, u)$, $K(x, y, u)$ и $f(x)$, заданных для $x, y \in B$ и $u \in [0, a]$, где B — ограниченная область n-мерного эвклидова пространства и $a > 0$.

При некоторых достаточных условиях устанавливаются теоремы существования положительных непрерывных решений уравнения (1) и доказывается, что эти решения могут быть найдены методом последовательных приближений при подходящем выборе начального приближения.

В. С. Виноградов (*Москва*). **О задаче Неейана для уравнения эллиптического типа.** Рассматривается уравнение

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \qquad (1)$$

где a, b, c — ограниченные измеримые функции в круге $D(|z| \leqslant 1)$, удовлетворяющие условию эллиптичности $ac - b^2 \geqslant K > 0$, а функции d, e, f, g принадлежат $L^p(D)$ и имеют достаточно малые нормы.

Для уравнения (1) решается задача Неймана $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$, где Γ — граница круга $|z| \leqslant 1$.

Решение ищется в виде $u(x, y) = \iint_D G(z, \zeta)\, \rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta + c$, где $G(z, \zeta)$ — функция Грина задачи Неймана для круга D уравнения $\Delta u = 0$, $\rho(\zeta)$ — неизвестная функция, c — некоторая постоянная.

Для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\iint_D (g - cf)\, \varphi\, d\xi\, d\eta = 0,$$

где φ — некоторая известная функция, было разрешимо относительно c.

Д. М. Гробман (*Москва*). **Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичные линейным.** Исследуется асимптотическое поведение решений нелинейных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x), \qquad (1)$$

где A — постоянная матрица порядка n, x и $f(t, x)$ — n-мерные векторы, $f(t, x)$ непрерывен для $t \geqslant t_0$ и x, принадлежащих некоторой области G, которая может совпадать с пространством R^n. Предполагается, что в G вектор $f(t, x)$ удовлетворяет условиям

$$f(t, 0) = 0 \text{ при } t \geqslant t_0, \tag{2}$$
$$| f(t, x') - f(t, x'') | \leqslant g \, | x' - x'' |,$$

где величина g зависит или от t или от точек x' и x'' и мала в том смысле, что соответственно или сходятся интегралы вида $\int\limits_{t_0}^{\infty} t^r g(t)\, dt$ ($r \geqslant 0$ — некоторое число), или $g(x', x'') \to 0$ и притом достаточно быстро при $|x'|^2 + |x''|^2 \to 0$ и при $|x'|^2 + |x''|^2 \to \infty$ ($|x|$ означает норму вектора x).

Наряду с уравнением (1) рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{3}$$

и вводится такое определение: решения $x(t)$ и $y(t)$ уравнений (1) и (3), имеющие одинаковые характеристические показатели λ, называются сходными, если $x(t) - y(t) | = o(e^{\lambda t})$ при $t \to \infty$.

Очевидно, разности между направляющими косинусами сходных решений стремятся к 0 при $t \to \infty$ и отношение их норм стремится к 1 при $t \to \infty$.

В зависимости от свойств функции g устанавливаются различные критерии сходства некоторых классов решений систем (1) и (3) или всех решений, даются количественные оценки, характеризующие близость сходных решений, и доказывается существование гомеоморфизмов между начальными условиями сходных решений. Кроме того, указываются условия, при выполнении которых каждое решение уравнения (1), за исключением, быть может, множества размерности, меньшей n, окажется сходным с некоторым решением уравнения (3) как при $t \to \infty$, так и при $t \to -\infty$. Наконец, при более жестких ограничениях на функцию g устанавливаются условия сходства (1) и (3) в том случае, когда матрица A — переменная.

А. И. Гусейнов (*Баку*), **Я. Д. Мамедов** (*Баку*). **Исследование нелинейного интегрального уравнения типа Урысона.** Исследуется интегральное уравнение вида

$$u(x) = \Phi\left[x; \int\limits_G K(x, s, u(s))\, ds, \lambda\right].$$

Доказываются теоремы существования в пространствах C, L_p и S, где S — множество функций, удовлетворяющих условиям:

1) $u(x) \in L_p$;

2) $|u(x)| \leqslant u_0(x)$ $(0 < u_0(x) \leqslant \infty)$.

Далее доказываются существование и единственность положительного решения и исследуется его поведение в зависимости от параметра λ. Наконец, исследуется задача разветвления решений указанного уравнения.

В. К. Иванов (*Свердловск*). **Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала.** Пусть D — односвязная область комплексной плоскости z, заполненная массой с постоянной плотностью μ, $V(x, y)$ — соответствующий внешний потенциал. Введем координаты $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$. Производная $U(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V}{\partial z}$ есть аналитическая вне D функция z.

Пусть $z(t)$ — функция, отображающая конформно единичный круг плоскости t на область D, $z^*(t) = \overline{z(\bar{t}^{-1})}$ — аналитическая при $|t| > 1$ функция.

Имеет место уравнение

$$\mu z^*(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{U[z(\tau)]}{\tau - t} d\tau, \quad |t| > 1. \tag{*}$$

Уравнение (*) позволяет установить связи между свойствами функций $U(z)$ и $z^*(t)$. Если $U(z)$ однозначна во всей плоскости z и имеет там конечное число особых точек, то такой же характер имеет $z^*(t)$. В частности, если $U(z)$ рациональна, то и $z^*(t)$ рациональна и имеет полюсы в таком же количестве и таких же кратностей, что и $U(z)$. Это позволяет в случае рациональной $U(z)$ свести решение обратной задачи потенциала (нахождение области D по внешнему потенциалу V) к нахождению конечного числа параметров из конечной системы алгебраических уравнений.

Уравнение (*) эквивалентно некоторому вариационному принципу.

В. А. Ильин (*Москва*). **О разложении по собственным функциям.** Изучаются вопросы о разложимости функций в ряд по собственным функциям уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в произвольной N-мерной области с однородным краевым условием любого из трех родов.

1. Доказано существование и найдено представление так называемых ядер дробного порядка, т. е. функций $K_\alpha(P, Q)$, имеющих своим рядом Фурье билинейный ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P) \cdot u_i(Q)}{\lambda_i^\alpha}$$

(α — любое положительное число).

Так, для произвольной N-мерной области при любом положительном $\alpha \neq \frac{N}{2}$, $\frac{N}{2}+1$, $\frac{N}{2}+2$, ... ядро $K_\alpha(P, Q)$ имеет вид

$$K_\alpha(P, Q) = \frac{r_{PQ}^{2\alpha - N}}{A_\alpha} + \chi_\alpha(P, Q),$$

где $\chi_\alpha(P, Q)$ — сколь угодно гладкая функция, а A_α — постоянная, равная $(\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot 2^{2\alpha} \cdot \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{N}{2} - \alpha\right)}$.

С точки зрения теории линейных операторов доказано существование и найдено представление любой положительной степени оператора, порождаемого функцией Грина.

2. Дано существенное обобщение понятия истокообразной представимости и классической теоремы Гильберта — Шмидта для ядер, связанных с уравнением $\Delta u + \lambda u = 0$.

Пусть g — произвольная N-мерная область, $C^{(k)}$ — произвольная k-мерная гиперповерхность типа Ляпунова, лежащая строго внутри g (здесь $k = 1, 2, \ldots, (N-1)$; мы положим $C^{(N)} \equiv g$). Назовем любую из функций $f_1(P)$, $f_2(P)$, ..., $f_N(P)$ истокообразно представимой при помощи ядер уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, если эти функции могут быть записаны в виде

$$f_k(P) = \int\int \ldots \int\limits_{C^{(k)}} K_\alpha(P, S) h_k(S) dS \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Здесь $K_\alpha(P, S)$ — любое из ядер дробного порядка, обладающее интегрируемым квадратом по объекту соответствующего числа измерений, а $h_k(S)$ — любая кусочно-непрерывная функция, заданная вдоль объекта соответствующего числа измерений.

Теорема. Любая из определенных выше функций разложима в абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям внутри производной N-мерной области

g, причем этот ряд сходится равномерно во всякой внутренней подобласти g' области g.

3. Доказана разложимость функции, обладающей особенностью типа r_{PQ}^{ε} ($\varepsilon > 0$), в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям произвольной N-мерной области.

4. Доказано, что функция, обладающая особенностью типа $\frac{1}{r_{PQ}^{\alpha}}$ ($0 < \alpha < 1$) или логарифмической особенностью, разложима при $Q \neq P$ в ряд по собственным функциям произвольной N-мерной области, причем этот ряд сходится равномерно при суммировании в порядке возрастания собственных чисел во всякой внутренней подобласти, из которой удалена сколь угодно малая окрестность особой точки.

5. Особо рассмотрен вопрос о разложимости кусочно-гладкой функции двух переменных (т. е. такой, для которой у самой функции и у ее первых производных допускаются разрывы 1-го рода на произвольных кривых с кусочно-непрерывной кривизной, лежащих внутри области).

Теорема. Всякая кусочно-гладкая функция двух переменных, удовлетворяющая соответствующему краевому условию, разложима в ряд по собственным функциям произвольной двумерной области, причем указанный ряд сходится равномерно при суммировании в порядке возрастания собственных чисел во всякой внутренней подобласти, из которой удалены сколь угодно малые окрестности тех контуров, на которых функция имеет разрывы непрерывности.

6. Доказано, что разложения, указанные в пп. 2 и 3, для случая краевого условия 1-го рода сходятся равномерно во всей замкнутой области g.

М. М. Лаврентьев (*Москва*). **О задаче Коши для уравнения Лапласа.** В докладе рассмотрена задача о нахождении гармонической функции внутри ограниченной области по ее значениям и значениям ее нормальной производной на куске границы области, т. е. задача Коши для уравнения Лапласа.

Для плоской задачи приведены неравенства, характеризующие корректность постановки в классе ограниченных функций, аналогичные известным неравенствам Карлемана, но в метрике L_2. Указано несколько методов эффективного решения задачи.

В пространственной задаче получены оценки, характеризующие устойчивость постановки, и предложен один метод эффективного решения.

В заключение указано приложение неравенства Карлемана к вопросу о сходимости ограниченных последовательностей аналитических функций.

М. А. Рутман (*Одесса*). **Исследование роста и признаки ограниченности решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными.** Рассматриваются следующие дифференциальные краевые задачи:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n} y}{\partial t_1^{p_1}\,\partial t_2^{p_2}\ldots\partial t_n^{p_n}} - A(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, y = x(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ &y(0, t_2, \ldots, t_n) = x_{1,0}(t_2, \ldots, t_n), \quad \frac{\partial y(0, t_2, \ldots, t_n)}{\partial t_1} = x_{1,1}(t_2, \ldots, t_n), \ \ldots, \\ &\frac{\partial^{p_1-1} y(0, t_2, \ldots, t_n)}{\partial t_1^{p_1-1}} = x_{1,\,p_1-1}(t_2, \ldots, t_n), \quad y(t_1, 0, \ldots, t_n) = x_{2,0}(t_1, t_3, \ldots, t_n), \\ &\ldots\ldots, \quad \frac{\partial^{p_n-1} y(t_1, t_2, \ldots, 0)}{\partial t_n^{p_n-1}} = x_{n,\,p_n-1}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}). \end{aligned}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial t_1\,\partial t_2} - A(t_1, t_2)\frac{\partial y}{\partial t_1} - B(t_1, t_2)\frac{\partial y}{\partial t_2} - C(t_1, t_2)\, y = x(t_1, t_2), \\ &y(0, t_2) = x_1(t_2), \quad y(t_1, 0) = x_2(t_1). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n}y}{\partial t_1^{p_1}\partial t_2^{p_2}\ldots\partial t_n^{p_n}}-\sum_{(q_1q_2\ldots q_n)}A_{q_1q_2\ldots q_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\frac{\partial^{q_1+q_2+\ldots+q_n}y}{\partial t_1^{q_1}\partial t_2^{q_2}\ldots\partial t_n^{q_n}}=\\
&\qquad\qquad\qquad=x(t_1, t_2, \ldots, t_n),\\
&y(0, t_2, \ldots, t_n)=x_{1,0}(t_2, \ldots, t_n),\quad \frac{\partial y(0, t_2, \ldots, t_n)}{\partial t_1}=x_{1,1}(t_2, \ldots, t_n), \ldots,\\
&\frac{\partial^{p_1-1}y(0, t_2, \ldots, t_n)}{dt_1^{p_1-1}}=x_{1,\, p_1-1}(t_2, \ldots, t_n),\\
&y(t_1, 0, \ldots, t_n)=x_{2,0}(t_1, t_3, \ldots, t_n),\\
&\ldots\ldots,\quad \frac{\partial^{p_n-1}y(t_1, t_2, \ldots, 0)}{\partial t_n^{p_n-1}}=x_{n,\, p_n-1}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

$$\left(p_j\geqslant q_j,\quad \sum p_j>\sum q_j\right).$$

Всюду предполагается, что $0\leqslant t_1, t_2, \ldots, t_n<\infty$; $x, x_{1,0}, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ — заданные непрерывные функции с областью значений, принадлежащей комплексному банахову пространству $\mathfrak{E}$; y — искомая функция с той же областью значений; A, B, C, $A_{q_1q_2\ldots q_n}, \ldots$ — непрерывные оператор-функции, которые при фиксированных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ действуют как линейные и ограниченные операторы в пространстве $\mathfrak{E}$; семейства A, B, C, $A_{q_1q_2\ldots q_n}, \ldots$ компактны (в смысле нормы операторов) и имеют слабую вариацию на бесконечности (последнее требование выполняется, если каждое из семейств A, B, ... допускает представление вида $A=A_1+A_2$, $B=B_1+B_2, \ldots$, причем

$$\|A_1\|\to 0,\quad \left\|\frac{\partial A_2}{\partial t_j}\right\|\to 0\quad \left(j=1, 2, \ldots, n \text{ при } \Sigma t_j\to\infty\right),$$

аналогичными свойствами обладают B_1, B_2 и т. д.).

Для системы (1) устанавливается точная оценка для показателя экспоненциального роста решения y в предположении, что правая часть x и начальные данные $x_{1,0}, x_{1,1}, \ldots, x_{n,\, p_n-1}$ имеют заданный экспоненциальный рост. Эта оценка обусловливается расположением точек спектра совокупности $\{A_\omega\}$ всех предельных операторов, порождаемых семейством A при $\Sigma\, t_j\to\infty$.

Для системы (2) с попарно перестановочными операторами A, B, C устанавливается следующий критерий ограниченности решений при всяких ограниченных x, x_1, x_2:

$$\operatorname{Re}(\lambda+\mu)+\sqrt{[\operatorname{Re}(\lambda-\mu)]^2+2\operatorname{Re}(\nu+\lambda\mu)+2|\nu+\lambda\mu|}<0,$$

где λ, μ, ν — точки, принадлежащие, соответственно, спектрам всевозможных предельных операторов A_ω, B_ω, C_ω.

Для системы общего вида (3) устанавливается критерий ограниченности решений по одной из переменных $0\leqslant t_j<\infty$ при условии, что остальные переменные изменяются в конечных промежутках.

Указанные результаты, опирающиеся на некоторые общие теоремы об операторных уравнениях в линейных полуупорядоченных пространствах, получаются посредством дальнейшего развития методов, приведенных нами в заметках [1] и [2] и кратко доложенных на Всесоюзном совещании по функциональному анализу (январь 1956 г.).

Лит.: 1. Рутман М. А., ДАН СССР, **101**, № 2, (1945), 217—220. 2. Рутман М. А., ДАН СССР, **101**, № 6, (1955), 993—996.

С. Н. Шиманов (*Свердловск*). **О квазилинейных колебаниях.** Дается метод построения периодических решений для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n+\mu\cdot F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu)\quad (s=1, \ldots, n), \tag{1}$$

где a_{si} — постоянные, F_s — непрерывные и периодические (периода 2π) функции времени t и непрерывные функции $x_1 \ldots x_n$, μ в некоторой области G и при $|\mu| \leqslant \mu^*$ (μ^* — положительное число); уравнение

$$|a_{si} - \delta_{si}\lambda| = 0 \tag{2}$$

имеет k корней, равных нулю или числам вида $\pm N\sqrt{-1}$ (N — целое число). Сущность метода состоит в следующем.

Рассматривается вспомогательная система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n + \mu F_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_{si}^* w_i,$$

$$w_i = -\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} F_j(t, x_1, \ldots, x_n, \mu)\,\psi_{ji}(t)\,dt \quad (s=1, \ldots, n;\ i=1, \ldots, m,\ m \leqslant k), \tag{3}$$

где $\psi_{1i}, \ldots, \psi_{ni}$ $(i=1, \ldots, m)$ — периодические решения системы

$$\frac{dy_s}{dt} = -a_{1s}y_1 - \cdots - a_{ns}y_n \quad (s=1, \ldots, n),$$

φ_{si}^* — периодические функции t (когда $k=m$, $\varphi_{si}^* = \varphi_{si}$ — периодические решения системы (1) при $\mu=0$).

Установлено, что система (3) имеет такое периодическое решение

$$x_s = f_s(t, M_1, \ldots, M_m, \mu) \quad (s=1, \ldots, n), \tag{4}$$

зависящее от произвольных постоянных $M_1, \ldots, M_m$, что

$$f_i(t, M_1, \ldots, M_m, 0) = M_1\varphi_{i1} + \cdots + M_m\varphi_{im}$$

(периодическое решение системы (1) при $\mu=0$). Дается способ последовательных приближений для построения решения (4) и оценивается область изменения параметра μ, где определено решение (4).

Система (1) имеет периодическое решение периода 2π, обращающееся при $\mu=0$ в решение

$$x_s^0 = \varphi_{s1}\overline{M}_1 + \cdots + \varphi_{sm}\overline{M}_m,$$

если уравнения

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \mu \cdot F_j(t, f_1, \ldots, f_n, \mu)\,\psi_{ji}\,dt = 0 \quad (i=1, \ldots, m)$$

имеют решение

$$M_i = M_i(\mu), \quad M_i(0) = \overline{M}_i \quad (i=1, \ldots, m).$$

При помощи этого общего метода построения решений получен ряд теорем о существовании периодических решений системы (1) как в случае непрерывных, так и в случае аналитических характеристик нелинейности F_s. Даны критерии устойчивости периодических решений.

Предлагаемый метод исследования распространен также на автономные системы (когда F_s не зависит явно от времени t).

В частности, для систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n + X_s^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + X_s^{(3)}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots \quad (s=1, \ldots, n), \tag{5}$$

где $X_s^{(i)}$ — формы i-й степени относительно $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами, получены условия существования периодических решений, которые вместе с их периодом зависят от нескольких параметров. Этот результат является обобщением известного результата А. М. Ляпунова для систем (5), когда уравнение (2) имеет пару корней $\pm\lambda\sqrt{-1}$.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Д. Л. Берман (*Новгород*). **Скорость сходимости интерполяционных процессов С. Н. Бернштейна и Эрмита—Фейера, построенных для некоторых классов узлов.** 1. В настоящем сообщении излагаются результаты о скорости сходимости интерполяционных процесов С. Н. Бернштейна и Эрмита—Фейера, построенных для некоторых широких классов узлов интерполяции.

2. Будем говорить, что система точек

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant 1, \quad n=1, 2, \ldots \tag{1}$$

обладает свойствами A) и B), если

A) в каждой точке $x \in [-1, 1]$ выполняются неравенства: при $x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)} \leqslant x$

$$|l_k^{(n)}(x)| \leqslant |l_{k+1}^{(n)}(x)|, \quad n=1, 2, \ldots$$

при $x \leqslant x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)}$

$$|l_k^{(n)}(x)| \geqslant |l_{k+1}^{(n)}(x)|, \quad n=1, 2, \ldots,$$

где $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^n$ — фундаментальные полиномы Лагранжа n-й строчки (1);

B) если через $\sigma(a, b)$ мы обозначим количество узлов n-й строчки матрицы (1) удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x_j^{(n)} \leqslant b$, то при $\sigma(x, x_j^{(n)}) = h$

$$|l_j^{(n)}(x)| \leqslant K\varphi(h),$$

где K—константа и $\varphi(h) \geqslant 0$—произвольная убывающая функция, причем

$$\varphi(h) \to 0, \quad h \to \infty.$$

Обозначим через $A_n(f, x)$ интерполяционный многочлен С. Н. Бернштейна [1], построенный для n-й строчки матрицы (1). (Мы пользуемся обозначениями из [2].) Тогда справедливы теоремы.

Теорема 1. Пусть матрица (1) обладает свойствами A) и B) и пусть $\omega(\delta)$ есть модуль непрерывности функции $f(x)$. Тогда

$$|f(x) - A_n(f, x)| \leqslant C\left[\omega(\delta) + \frac{\omega(\delta)}{\delta} \cdot 12p\varphi\left(\frac{\delta}{\Delta_n}\right)\right], \quad n=1, 2, \ldots,$$

где $\Delta_n = \max\limits_{i=1, 2, \ldots, (n-1)} (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})$.

Матрица (1) называется регулярной, если она удовлетворяет условиям A) и существует такое конечное положительное число C_1, что для всех $x \in [-1, 1]$

$$\sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(x)]^2 < C_1, \quad n=1, 2, \ldots$$

Теорема 2. Пусть многочлен $A_n(f, x)$ построен для регулярной матрицы. Тогда при обозначениях из теоремы 1 справедлива оценка

$$|f(x)-A_n(f, x)| \leqslant C_2\omega\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right). \tag{2}$$

Теорема 3. Пусть n-я строчка матрицы (1) составлена из корней полиномов Якоби $Y_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(x)$, $-1 \leqslant \alpha_n$, $\beta_n < 0$. Тогда справедлива оценка (2) (причем

$$Y_n^{(-1, 1)}(x) = \int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\, dt,$$

где $P_{n-1}(t)$ — полином Лежандра $(n-1)$-й степени).

3. Пусть $H_n(f, x)$ — интерполяционный многочлен Эрмита — Фейера степени $(2n-1)$, однозначно определяемый из условий

$$H_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \quad H_n'(f, x_k^{(n)}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 4. Пусть $H_n(f, x)$ построен для n-й строчки ρ-нормальной матрицы (см. [3], [5]). Тогда

$$|f(x)-H_n(f, x)| \leqslant C(\varepsilon)\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n^{\rho-\varepsilon}}}\right), \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое и $C(\varepsilon)$ зависит лишь от ε.

Теорема 5. Пусть n-я строчка матрицы (1) состоит из корней полиномов Якоби

$$Y_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(x), \quad -1 \leqslant \alpha_n, \quad \beta_n < 0.$$

Тогда справедлива оценка (3) при $\rho = \min\{-\alpha_n, -\beta_n\}$.

Теорема 6. Пусть $\omega_1(\delta)$ есть модуль непрерывности $f'(x)$. Тогда

$$|f(x)-H_n(f, x)| \leqslant C_1(\varepsilon)\,\omega_1\left(\frac{1}{n^{\rho-\varepsilon}}\right) + \frac{C_2(\varepsilon)\,|f'(x)|}{n^{\rho-\varepsilon}} + \frac{1}{n^{\rho-\varepsilon}}\,\omega_1\left(\frac{1}{n^{\rho-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое и $C_i(\varepsilon)$, $i=1, 2$, зависят лишь от ε.

Лит.: 1. Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, (1952), 130. 2. Берман Д. Л., ДАН СССР, 60, № 3 (1948). 3. Fejér L., Nathem. Ann., 106, (1932). 4. Берман Д. Л., ДАН СССР, 58, (1947), 1563—1571. 5. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, (1949).

А. Л. Гаркави (*Львов*). **Квазианалитические классы функций.** В докладе рассматриваются следующие вопросы: 1. $B\{n_k\}$ — класс квазианалитических (B) (по С. Н. Бернштейну) функций, для которых существует такая последовательность $\{n_k'\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{E_{n_k'}(f)} = \rho < 1,$$

причем $\frac{1}{c} < \frac{n_k'}{n_k} < c$.

Теорема. Для того, чтобы все функции класса $B\{n_k\}$ являлись квазианалитическими (D) (т. е. в смысле Данжуа), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая весовая четная нормально возрастающая функция $F(x) > 0$, что выполнимы неравенства

$$\ln F(n_{k+1}) \leqslant n_k \qquad (k = 1, 2 \ldots). \tag{A}$$

При этом все классы $B\{n_k\}$, для которых (A) выполнимо при одной и той же функции $F(x)$, образуют один класс квазианалитических (D) функций.

Следствие I. Если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \ln n_k \dots \ln_p n_k \quad (\ln_p n_k = \ln \ln_{p-1} n_k),$$

то класс $B\{n_k\}$ квазианалитичен (D).

Следствие II. Если $f_1(x) \in B\{n_k\}$ и $f_2(x) \in B\{m_k\}$, причем

$$\ln F(n_{k+1}) \leqslant n_k,$$
$$\ln F(m_{k+1}) \leqslant m_k$$

и $f_1(x) = f_2(x)$ на произвольно малой части отрезка, то $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на всем рассматриваемом отрезке.

Следствие III. Не существует неоднозначной квазианалитической (B) функции, все ветви которой принадлежат классам, для которых выполняются неравенства

$$\ln F(n_{k+1}) \leqslant n_k.$$

2. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{E_{n_k}(f, [a, b])} = 0,$$

F — счетное множество точек на отрезке $[a, b]$, Δx — смежные к F интервалы,

$$\rho_F(x_0 x) = \max_{\Delta x} |\Delta x| \, [x_0 - x, x_0 + x],$$

$f(x)$ — такая монотонная функция, что

$$\rho(\max_{k' \geqslant k} A \sqrt[n_{k'}]{E_{n_{k'}}(f)}) \leqslant E_{n_k}(f) \qquad (A > 1).$$

Теорема. Если

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{E_{n_k}(f_1 [ab])} = 0 \quad \text{и} \quad |f(x)| \leqslant \rho(x - x_0)$$

на $F \cdot [x_0 - x, x_0 + x]$, причем $\rho_F(x_0 x) \leqslant \rho(x - x_0)$, то $f(x) \equiv 0$ на $[ab]$.

Теорема. Любая непрерывная на $[ab]$ функция (в том числе и тождественный 0) может быть псевдоаналитическим продолжением некоторой квазианалитической (B) на $[bc]$ функции.

Таким образом, невозможно однозначно восстановить квазианалитическую функцию по ее псевдоаналитическому продолжению.

4. Типы неоднозначных квазианалитических (B) функций.

А. Г. Джваршейшвили (*Тбилиси*). **О коэффициентах Фурье—Данжуа.** Известно, что коэффициенты Фурье—Данжуа функции $f(x)$ относительно ортонормированной системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right\}$ на сегменте $[0,2\pi]$ равны $o(n)$ и этот результат не может быть улучшен.

Естественно возникает вопрос: существует ли такая ортонормированная система функции $\{\omega_k(x)\}$ на сегменте $[a, b]$, что коэффициенты Фурье—Данжуа функции $f(x)$ равнялись бы $O(1)$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\{g_n(t)\}$ есть последовательность функций с ограниченным изменением на $[a, b]$, то неравенство

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x) g_n(x)\, dx \right| < M(f), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

имеет место для любого $[\alpha, \beta] \leqslant [a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |g_n(x)| < C, \qquad V_a^b(g_n) < C, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $M(f)$ зависит только от функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, b]$ в смысле Данжуа—Перрона.

Теорема 2. Если $\{g_n(t)\}$ есть последовательность локально монотонных функций на $[a, b]$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_a^b \varphi(t) g_n(t)\,\partial t\right| < M$$

для каждой суммируемой функции $\varphi(t)$ на $[a, b]$, то неравенство

$$\left|\int_a^b f(t) g_n(t)\,dt\right| < M(f), \quad n=1, 2, \ldots,$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия (1).

В частности, если $\{\omega_k(x)\}$ есть такая ортонормированная система локально монотонных функций на $[a, b]$, что

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |\omega_k(x)| < M, \quad k=1, 2, \ldots,$$

то коэффициенты Фурье—Данжуа функции $f(x)$ относительно системы $\{\omega_k(x)\}$ равны $O(1)$ тогда и только тогда, когда

$$V_a^b(\omega_k) < C, \quad k=1, 2, \ldots.$$

И. И. Ибрагимов (*Баку*). **Некоторые результаты о приближении функций посредством многочленов и целых функций.** 1. Приближение в среднем функций комплексного переменного в бесконечных областях посредством целых функций конечной степени (результаты И. И. Ибрагимова и Р. Г. Мамедова). Указывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы целая функция была наименее уклоняющейся от данной функции в смысле метрики пространства L_2.

2. Приближение функций многих переменных в различных пространствах посредством многочленов и целых функций многих переменных (результаты А. С. Джафарова, А. Я. Исмаилова и Р. Г. Мамедова). Найдены различные обобщения классических неравенств теории приближений для многочленов и для целых функций многих переменных. Кроме того, найден точный порядок наилучшего приближения функций многих переменных из определенных классов.

3. Асимптотическое выражение наилучшего приближения конкретно заданных функций посредством многочленов и целых функций (результаты А. С. Джафарова, Ш. Мамедова и др.). Найдено асимптотическое выражение наилучшего приближения в среднем функций с известными особенностями посредством многочленов и целых функций с весом и без веса.

А. А. Ляпунов (*Москва*). **Об операциях над множествами, допускающими трансфинитные индексы.** Классификацию эффективных множеств строят путем повторного применения некоторой теоретико-множественной операции или некоторого набора операций, отправляясь от некоторого исходного класса множеств.

Так получаются, например, различные классификации B-множеств, C-множеств, R-множеств или проективных множеств.

Таким образом, множества классифицируются по способам их образования.

Возникает вопрос о том, какие из свойств, присущих множествам исходного класса, сохраняются у множеств, получаемых определенными операциями, т. е. вопрос о связи между способами образования множеств и их внутренним строением.

Цель настоящей работы—изучение свойств R-множеств и тех операций, с помощью которых они могут быть образованы.

Пусть дана последовательность баз δs-операции $\{N_i\}$, $i=0, 1, 2, \ldots$. Конъюнктивным расширением δs-операций с этими базами мы назовем δs-операцию, база N которой устроена так:

1) если $\eta \in N$, то существует такая цепь $\eta_0 \in N_0$, что $\eta_0 \subset \eta$;

2) если $\eta \in N$ и $n \in \eta$, то существует такая цепь $\eta_n \in N_n$, что $\eta_n \subset \eta$;

3) база N состоит из всех цепей, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Конъюнктивное расширение может быть представлено в виде T-операции. Рассмотрим произвольную систему множеств $\{E_n\}$. Пусть $E'_n = E_n$. Положим $E_n^{\alpha+1} = E_n^\alpha \cdot \Phi_{N_n}\{E_m^\alpha\}$ и $E_n^\gamma = \prod\limits_{\alpha<\gamma} E_n^\alpha$ для чисел γ 2-го рода. Тогда

$$T_{\{N_n\}}\{E_m\} = \prod_{\alpha<\Omega} E_0^\alpha \equiv E_0^\Omega.$$

Дизъюнктивное расширение последовательности δs-операций есть δs-операция, база M которой определяется так:

1) $N_0 \subset M$;

2) если $\eta \in M$ и $n \in \eta$, то, какова бы ни была цепь $\eta_n \in N_n$, $\eta' = \eta - (n) + \eta_n \in M$ (через (n) обозначено множество, состоящее из единственного элемента n);

3) база M состоит из всех цепей, обладающих этим свойством. Конъюнктивное расширение может быть представлено в виде T^c-операции. Пусть $\widetilde{E}'_m = E_m$, $\widetilde{E}_m^{\alpha+1} = \widetilde{E}_m^\alpha + \Phi_{N_m}\{\widetilde{E}_m^\alpha\}$ и $\widetilde{E}_m^\gamma = \sum\limits_{\alpha<\gamma} \widetilde{E}_m^\alpha$ для чисел γ 2-го рода. Тогда

$$T^c_{\{N_i\}}\{E_m\} = \sum_{\alpha<\Omega} \widetilde{E}_0^\alpha \equiv \widetilde{E}_0^\Omega.$$

Конъюнктивное и дизъюнктивное расширение последовательности баз взаимно дополнительных операций взаимно дополнительны. R-операции суть частный случай конъюктивных расширений.

Если все составляющие операции сохраняют измеримость или свойство Бэра, то это имеет место и для их конъюнктивных расширений.

Для конъюнктивных расширений можно определить трансфинитные индексы, вполне аналогичные индексам A-операции или решета.

Для этих индексов имеет место принцип сравнения, аналогичный тому, который установлен П. С. Новиковым для индексов A-операции.

Исходя из операций Σ и Π, применяя конечное или счетное число раз операции конъюнктивного и дизъюнктивного расширения и применяя операции к подпоследовательности, мы получим систему операций, эквивалентных всем R^α- и $R^{\alpha c}$-операциям. Исходя из интервалов, с помощью этих операций мы получим все R-множества. Эти множества укладываются в систему B_2-множеств.

Конъюнктивное расширение последовательности δs-операций с полными базами можно рассматривать как двустепенную δs-операцию. Первая δs-операция с постоянной базой представима через Σ и Π-операции и совершается над исходными базами и интервалами Бэра, вторая—с полученной базой над данными множествами.

Для T- и T^c-операций имеют место соотношения кратной отделимости и неотделимости такие же, как и для A-операции, а также вытекающие из них соотношения вырождения и накрытия.

Лит.: 1. Канторович Л. В. и Ливенсон Е. М., Fund. Math., XX, (1933), 54—97. 2. Ляпунов А. А., Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, XL, (1953), 1—67. 3. Ляпунов А. А., Мат. сб., 32 (74):1, (1953), 255—265. 4. Ляпунов А. А., Мат. сб., 32, (74):3, (1953), 515—532. 5. Ляпунов А. А., Изв. АН СССР, сер. мат., 17, (1953), 563—578. 6. Новиков П. С., Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, XXXVIII, (1951), 279—316.

СЕКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Н. В. Азбелев (*Ижевск*) **и З. Б. Цалюк** (*Ижевск*). **Об одном обобщении теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.** В работе рассматриваются условия, гарантирующие знакоопределенность разности $z-y$, где y — решение операторного уравнения $P(y)=0$, а z — данный элемент. В работе приведено решение задачи о построении элементов $\bar{z}$ и $\underline{z}$, удовлетворяющих неравенствам $\bar{z} > y > \underline{z}$, и дана оценка погрешности приближенного решения уравнения $P(y)=0$.

Обозначения: X и X_1 — K-линеалы, $E \subset X$ — линейное пространство, G — пересечение некоторого класса смежности X по E с отрезком $[a, b]$ ($a \leqslant x \leqslant b$, $x \in X$), P_M — оператор, переводящий $M \subset X$ в X_1, y — решение уравнения $P_M(y)=0$.

Определения: 1. P_G удовлетворяет условию L, если для любых $x_1, x_2 \in G$ найдется такой линейный на E оператор $L_{x_1 x_2}$, что $P(x_2) - P(x_1) \leqslant L_{x_1 x_2}(x_2 - x_1)$.

2. P_G удовлетворяет условию L^* (L^{**}), если существует такой линейный на E оператор L^* (L^{**}), что для любых $x_1, x_2 \in G$, $x_2 \geqslant x_1$ $P(x_2) - P(x_1) \leqslant L^*(x_2 - x_1)$ ($P(x_2) - P(x_1) \geqslant L^{**}(x_2 - x_1)$).

Обобщение теоремы Чаплыгина. Пусть P_G удовлетворяет условию L, причем операторы $(L_{x_1 x_2})^{-1}$ положительны (отрицательны). Тогда неравенство $P_G(z) > 0$ влечет за собой неравенство $z > y$ ($z < y$), а неравенство $P_G(z) < 0$ — неравенство $z < y$ ($z > y$).

Лемма. Пусть $u \in G$, $P_G(u) = \varphi$, $\bar{\varphi}$, $\underline{\varphi} \in X_1$, причем $0 \leqslant \bar{\varphi} \geqslant \varphi$, $0 \geqslant \underline{\varphi} \leqslant \varphi$, а $\bar{\xi}$, $\underline{\xi} \in E$ — решения уравнений $L^* \bar{\xi} = \bar{\varphi}$ и $L^* \underline{\xi} = \underline{\varphi}$ ($L^{**} \bar{\xi} = \bar{\varphi}$ и $L^{**} \underline{\xi} = \underline{\varphi}$). Пусть, далее, P_G удовлетворяет условию L^* (L^{**}), причем оператор L^* (L^{**}) имеет отрицательный (положительный) обратный. Тогда $P(v) > 0$ ($P(w) < 0$) и $\bar{\xi} < u - y < \underline{\xi}$ ($\underline{\xi} < u - y < \bar{\xi}$), если $v = u - \underline{\xi} \in [a, b]$ ($w = u - \bar{\xi} \in [a, b]$).

И. Ц. Гохберг (*Бельцы*). **Применение теории нормированных колец к доказательству теорем о разрешимости некоторых систем интегральных уравнений.** Рассматриваются системы интегральных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} K_{ij}(x-s)\, \varphi_i(s)\, ds - \lambda \varphi_i(x) = f_j(x) \qquad (*)$$

в пространстве $L(0, \infty)$. Такие системы встречаются в астрофизике. При помощи методов теории нормированных коммутативных колец доказывается, что в случае, когда $\det(\widetilde{K}_{ij}(x) - \lambda)$ нигде не обращается в нуль, и только в этом случае $\left(\text{здесь } \widetilde{K}_{ij}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(s)\, e^{ixs}\, ds\right)$, имеют место следующие утверждения:

а) однородная система уравнений имеет конечное число линейно независимых решений;

б) сопряженная однородная система уравнений имеет также конечное число линейно независимых решений;

в) система уравнений (1) нормально разрешима, т. е. для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n f_i(x)\,\psi_i(x)\,dx = 0,$$

где $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ — любое решение сопряженного однородного уравнения;

г) вводится понятие индекса задачи и указывается способ его вычисления;

д) система (1) сводится к решению обычной системы интегральных уравнений, где интегральные операторы вполне непрерывны. Аналогичные теоретико-кольцевые соображения можно привлечь для исследования систем сингулярных интегральных уравнений.

М. А. Красносельский (*Воронеж*). **О применении методов функционального анализа к задачам о нелинейных колебаниях.** Рассматриваются различные задачи, связанные с периодическими решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

с периодическими по t правыми частями, зависящими от параметра μ. Затем конструируется специальное уравнение вида

$$\varphi = A(\varphi; \mu, T), \tag{2}$$

где A — вполне непрерывный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве, зависящий от параметра μ и, возможно, от дополнительного параметра T. Уравнение (2) конструируется так, чтобы его решения соответствовали периодическим решениям системы (1).

Таким образом, некоторые вопросы о нелинейных колебаниях сводятся к изучению уравнений вида (2), для чего могут быть применены известные общие методы. С другой стороны, указанное сведение приводит к новым задачам для уравнения (2). Заметим, что дополнительный параметр T появляется в случае автономных систем — это неизвестный период периодического решения.

Исследование показало, что переход к уравнению (2) позволяет интерпретировать многие теоремы о зависимости периодических решений от малого параметра как теоремы о ветвлении решений интегральных уравнений.

Получены теоремы о периодических решениях систем Ляпунова и систем, близких к ляпуновским, без предположений о существовании первого интеграла специального вида, которое заменяется условиями четности и нечетности некоторых выражений.

Повидимому, наибольший интерес представляют некоторые новые признаки существования периодических решений у систем со многими степенями свободы для случая, когда правые части не содержат малого параметра.

В. Э. Лянце (*Львов*). **К структуре обобщенных функций.** Изучаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы обобщенная функция T, заданная на пространстве финитных функций, порождалась функцией точки, дифференцируемой в классическом смысле определенное число раз, или была равна обобщенной производной функции точки, интегрируемой в квадрате.

Теорема 1. Для того чтобы обобщенная функция T была равна в области Ω функции точки $f(x)$, имеющей производные порядка p, интегрируемые в квадрате в каждой конечной подобласти Ω', $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, необходимо, чтобы каждой финитной функции $\alpha(x)$, несущее множество которой содержится в Ω, функция

$$\Theta_\alpha(\lambda)=(T,\ \alpha(x)\,e^{2\pi i(x,\ \lambda)})$$

удовлетворяла условиям:

I) $\Theta_\alpha(\lambda)$ есть целая функция первого порядка роста конечного типа;

II) функция $(1+|\sigma|)^{p+1}\ \Theta_\alpha(\sigma)$, где $\sigma=\operatorname{Re}\lambda$, интегрируема в квадрате в области $|\sigma|<\infty$.

Теорема 2. Пусть $\{\Omega_k\}$ — последовательность конечных подобластей области Ω, удовлетворяющая условиям:

a) $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\ldots\subset\Omega_k\subset\ldots$;

b) $\overline{\Omega}_k\subset\Omega$, $k=1, 2, \ldots$,

c) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Omega_k=\Omega$.

Пусть $\{\alpha_k(x)\}$ — последовательность таких финитных функций с несущим множеством в Ω, что $\alpha_k(x)=1$ при $x\in\Omega_k$, $k=1, 2, \ldots$. Для того чтобы имело место утверждение теоремы 1 (относительно T и $f(x)$), достаточно, чтобы все функции

$$\Theta_{\alpha_k}(\lambda)=(T,\ \alpha_k(x)\,e^{2\pi i(x,\ \lambda)})\qquad (k=1, 2, \ldots)$$

удовлетворяли условиям I) и II).

Если условие II) заменить условием:

II') функция $(1+|\sigma|)^{-p}\ \Theta_\alpha(\sigma)$ интегрируема в квадрате в области $|\sigma|<\infty$, то теоремы 1 и 2 дадут необходимые и достаточные условия для того, чтобы обобщенная функция T была равна в области Ω обобщенной производной порядка p функции $f(x)$, интегрируемой в квадрате в каждой конечной подобласти Ω', $\overline{\Omega}'\subset\Omega$.

Замечание. Пусть T во всем пространстве равна функции $f(x)$, интегрируемой в квадрате в каждой конечной подобласти. Тогда

$$f(x)=\int\widetilde{T}(\sigma,\ x)\,e^{-2\pi i(x,\ \sigma)}\,d\sigma,$$

где

$$\widetilde{T}(\sigma,\ \xi)=(T,\ \varphi_0(x-\xi)\,e^{2\pi i(x,\ \sigma)})$$

и $\varphi_0(x)$ — какая-нибудь финитная функция, удовлетворяющая условию $\varphi_0(0)=$ $=\varphi_0(0, \ldots, 0)=1$. При этом на поведение $f(x)$ при $|x|\to\infty$ не налагаются никакие условия.

З. И. Рехлицкий (*Одесса*). **Необходимые и достаточные критерии устойчивости решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве.** Рассмотрим пространство $\overset{\frown}{E}$ непрерывных функций $x=x(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ с областью значений, принадлежащей комплексному пространству Банаха $\overset{\frown}{\mathscr{E}}$.

Пусть $\overset{\frown}{E}_0$ — подпространство непрерывных функций $\{x(t)\}$, аннулирующихся при $t\leqslant 0$.

Опираясь на некоторые теоремы и методы из работ М. А. Рутмана [1] и [2], можно показать, что в пространстве $\overset{\frown}{E}$ имеет место

Теорема 1. Пусть оператор-функция $A=A(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) при каждом фиксированном t $A(t)$ — линейный ограниченный оператор, действующий в $\overset{\frown}{\mathscr{E}}$;

2) семейство операторов $\{A(t)\}$ компактно: из всякой последовательности $\{A(t_n)\}$ можно выделить сильно сходящуюся часть;

3) существует сильная производная $A'(t)$;

4) $\lim\limits_{t\to\infty}\|A'(t)\|=0$.

Для того чтобы краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}-A(t)\,y(t-a)=x(t) \quad (a>0) \quad (0\leqslant t<\infty), \\ y(t)=\varphi(t) \quad \text{при} \quad t\leqslant 0 \end{cases}$$

имела ограниченное решение $y(t)$ при всяких ограниченных $x(t)$ и $\varphi(t)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого предельного оператора A_ω, порождаемого семейством $\{A(t)\}$ при $t\to\infty$ все корни z уравнения

$$1-ze^{\lambda az}=0$$

для любого λ из спектра A_ω лежали вне единичного круга.

Примечание. Областью «устойчивости» для нашего уравнения будет внутренность овала, ограниченного кривой

$$\lambda=-\frac{1}{a}\cdot\frac{i\varphi}{e^{i\varphi}}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Теорема 2. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — линейные, ограниченные и попарно перестановочные операторы: $A_iA_k=A_kA_i$, действующие в банаховом пространстве $\mathfrak{E}$.

Для того чтобы краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}-\sum\limits_{i=1}^{n}A_iy(t-a_i)=x(t) \quad (0<a_1<a_2<\ldots<a_n) \quad (0\leqslant t<\infty), \\ y(t)=\varphi(t) \quad (t\leqslant 0) \end{cases}$$

имела ограниченное решение $y(t)$ при всяких ограниченных $x(t)$ и $\varphi(t)$, достаточно, чтобы корни z уравнения

$$1-ze^{(\lambda_1+\lambda_2z+\ldots+\lambda_nz)a_1z}=0$$

при любых λ_i из спектров A_i лежали вне единичного круга.

Условие, указанное в теореме 2, оказывается необходимым, когда $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ — скаляры.

Что касается общего случая, то необходимое и достаточное условие может быть установлено путем исследования общих инвариантных подпространств операторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Лит.: 1. Рутман М. А., ДАН СССР, **101**, № 2, (1955). 2. Рутман М. А., ДАН СССР, **101**, № 6, (1955).

Д. В. Салехов (*Казань*). **О норме линейного функционала в пространстве Орлича.** В последние годы опубликован ряд исследований, в которых изучаются или используются пространства Орлича L_M^*. В частности, в работах М. А. Красносельского и Я. Б. Рутицкого теория этих пространств нашла применение к исследованию интегральных уравнений с сильными нелинейностями типа экспоненциальных

Уточнение условий теорем существования решений и собственных функций связано с оценками норм специальных операторов. Это в свою очередь требует вычисления норм линейных функционалов на L_M^*, допускающих интегральное представление

$$l(u)=\int\limits_G u(x)\,v(x)\,dx, \tag{1}$$

где $v(x)\in L_N^*$.

Известно, что $\|l\|=K(v)\,\|v\|_N$, где функция $K(v)$ удовлетворяет неравенствам

$$1\leqslant K(v)\leqslant 2. \tag{2}$$

В случае пространств L_p функция $K(v)$ принимает постоянное значение. В докладе функция $K(v)$ подвергнута детальному анализу. Доказывается, что существуют пространства Орлича, для которых значения $K(v)$ заполняют интервал (1,2). Для других классов пространства Орлича указываются более широкие оценки для $K(v)$, чем те, которые даются неравенством (2). Эти оценки позволяют уточнить для пространств Орлича обобщенное неравенство Гёльдера с нормами. Показано, что равенство $K(v)=\text{const}$ выделяет из всех пространств Орлича пространства L_p.

А. Т. Талдыкин (*Ленинград*). **О теоремах разложения по собственным и присоединенным элементам несамосопряженных линейных операторов.** В гильбертовом пространстве H выделяются линейные операторы (ограниченные и неограниченные, имеющие ограниченный обратный), у которых система собственных и присоединенных элементов является полной.

Они могут быть охарактеризованы следующими теоремами, формулируемыми здесь в предположении (для простоты) бесконечности радиуса Фредгольма оператора.

1. Для полноты системы собственных и присоединенных элементов оператора A необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента f из H нашлось такое положительное число ε_f, что выполняется неравенство

$$\|A^{*n} f\| \geqslant \varepsilon_f^n \|f\|$$

хотя бы для некоторой бесконечной последовательности натуральных n.

Для неограниченного оператора, имеющего ограниченный обратный, соответствующее суждение высказывается через посредство этого обратного оператора.

2. Если оператор A является определенным (т. е. таким, что из $Ah=0$ следует $h=0$) и оператор A^*A-AA^* является оператором определенного знака (т. е. либо неотрицательным, либо неположительным), то оператор A имеет полную систему собственных и присоединенных элементов.

3. То же можно высказать в следующих словах: если оператор A определенный и $A^*=PA$, где P — оператор с нормой, не превосходящей единицы, то оператор A имеет полную систему собственных и присоединенных элементов.

4. Если существует такой ограниченный перестановочный с A оператор B, что оператор $C=AB$ имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, то и оператор A имеет полную систему собственных и присоединенных элементов.

5. Если существует перестановочный с A оператор B такой, что $\|Bf\| \leqslant M\|Af\|$, и оператор $C=A+B$ имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, то и оператор A имеет полную систему собственных и присоединенных элементов.

6. Если оператор $A_1=BC$ имеет полную систему собственных и присоединенных элементов, то и оператор $A_2=CB$ имеет полную систему собственных и присоединенных элементов.

7. Системы собственных и присоединенных элементов операторов A и A^* полны одновременно.

Проблема разложения освещается следующими положениями.

8. Системы собственных и присоединенных элементов операторов A и A^* биортогональны.

9. Если матрицы скалярных произведений элементов этих систем к тому же ограничены, то всякий элемент из H разлагается в биортогональные ряды по каждой из этих систем.

10. Если матрица Φ скалярных произведений элементов оператора A не ограничена, то всегда можно найти такую диагональную матрицу D с диагональными элементами $\frac{1}{d_i}$, что матрица $D\Phi D$ будет ограниченной, и тогда, для того, чтобы биортогональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ для элемента f сходился сильно к этому элементу, достаточна (а при соответствующем подборе D и необходима) сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 d_k^2.$$

Для интегральных операторов (именно они интересуют нас в краевых задачах) могут быть сформулированы положения.

11. Для того чтобы любая функция

$$f(x)=\int_a^b K(x, y)\, h(y)\, dy,$$

представимая истокообразно с помощью ядра при функции $h(x)$ с интегрируемым квадратом, разлагалась в равномерно сходящийся ряд

$$f(x)=\sum_{\alpha=1}^{\infty} A^{\alpha} \varphi_{\alpha}(x)$$

по собственным функциям ядра, необходимо и достаточно, чтобы билинейный ряд

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\alpha}(x)\, \psi_{\alpha}(y)}{\lambda_{\alpha}}$$

сходился слабо по y к ядру $K(x, y)$ равномерно относительно x в $[a, b]$.

12. Так как одно из повторных ядер наверное обладает билинейным рядом, слабо сходящимся по y равномерно относительно x, то при сходимости его к ядру можно утверждать, что всякая функция, удовлетворяющая краевым условиям задачи и имеющая нужное число производных, разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям такой задачи.

Детально излагаются теоремы разложения по собственным и присоединенным элементам оператора A, связанного с сопряженным условием $A^{*}=PA$, где $\|P\|\leqslant 1$.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Г. А. Ососков (*Москва*). **Предельные теоремы для потоков однородных событий.** Данное сообщение является развитием некоторых идей, содержащихся в книге А. Я. Хинчина «Математические методы теории массового обслуживания» (Труды Мат. института им. Стеклова, т. XLIX, гл. 5)

Рассматривается последовательность серий из $n(n=1, 2\ldots)$ взаимно независимых потоков однородных событий (например, серий потоков телефонных вызовов). Найдены необходимые и достаточные условия для сходимости суперпозиции (простой суммы) таких потоков в сериях при $n \to \infty$ к простейшему потоку (процессу Пуассона) при условии стационарности и ординарности слагаемых потоков (ординарность потока — практическая невозможность совмещения двух событий в один и тот же момент времени).

Полученные результаты обобщаются на случай серий из так называемых потоков с ограниченным последствием.

Розенблат-Рот Миллу (*Москва*). **Понятие энтропии в теории вероятностей и его применения в теории передачи по каналам связи.** Устанавливается, что некоторые основные теоремы теории передачи информации справедливы для широкого класса нестационарных источников и каналов.

а) Из простой аксиоматики можно вывести, что мера неопределенности, создаваемая полем A (распределение вероятностей в котором имеет плотность $p(x)$ по мере μ), определяется единственным образом как $H(A) = -\int\limits_{\mathfrak{A}} p(x)\log p(x)\,dx$. Если $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i$, $P(\mathfrak{A}_i) = P_i$, причем в $\mathfrak{A}_i$ задана мера μ_i, то $H(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} H'(A_i)$,

$$H'(A_i) = -\int\limits_{\mathfrak{A}_i} p(x_i)\log p(x_i)\,dx_i, \qquad H(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i H_i(A) + H(B),$$

где $H_i(A)$ является условной энтропией поля A при условии $\mathfrak{A}_i$ и B — дискретное поле с элементарными событиями $\mathfrak{A}_i$ и вероятностями P_i. С некоторыми изменениями все свойства энтропии конечных полей сохраняются и для $H(A)$.

б) Пусть имеется стохастический процесс A с состояниями $x_t \in \mathfrak{A}_t$ (t — целое), причем в $\mathfrak{A}_t$ имеется σ-конечная мера; предположим, что процесс задается с помощью плотностей цепочек $(x_t, \ldots, x_{t+n-1})$ и пусть $A^{[t, t+n-1]}$ — поле этих цепочек. Энтропия процесса A в момент t определяется как $H_t(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(A^{[t, t+n-1]})$ (если этот предел существует).

Теорема. Для существования $H_t(A)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{H(A_{t+n} \mid A^{[t, t+n-1]})\}$ была суммируема по Чезаро $C(1)$. При этом $H_t(A)$ является пределом соответствующих средних.

При незначительных ограничениях энтропия нестационарных процессов не зависит от t (как и у стационарных). Пусть $x=(\ldots x_{-1}, x_0, x_1\ldots)$; $f^{[t, t+n-1]}(x)$ равно минус $\frac{1}{n}$ от логарифма плотности цепочки $(x_t, \ldots x_{t+n-1})$; $g^{[t, t+n-1]}(x)$ равно минус логарифм плотности x_{t+n} при фиксированных $x_t, \ldots, x_{t+n-1}$. Говорят, что процесс обладает свойством $\mathrm{E}_t(A)$, если $f^{[t, t+n-1]}(x)$ сходится по вероятности к $H_t(A)$ при $n\to\infty$, и обладает свойством Е, если $\mathrm{E}_t(A)$ имеет место при всех t.

Теорема. Для того чтобы имелось $\mathrm{E}_t(A)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $g^{[t, t+n]}(x)$, $n=1, 2, \ldots$, подчинялась закону больших чисел. Отсюда получаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы стационарный процесс обладал свойством Е. При некоторых ограничениях доказывается, что стационарный эргодический процесс с любым множеством состояний обладает свойством Е; в частности, получается теорема Макмиллана. Выясняется, что эргодичность не является необходимым условием для свойства Е. Пусть $0<\lambda<1$ и $N^{[t, t+n-1]}(\lambda)$ — множество цепочек $(x_t\ldots x_{t+n-1})$, для которого $P^{[t, t+n-1]}(N^{[t, t+n-1]}(\lambda))\geqslant\lambda$ и которое среди всех множеств, удовлетворящих этому неравенству, имеет минимальный объем.

Теорема. Если $H_t(A)$ существует, конечно и имеет место $\mathrm{E}_t(A)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\log v^{[t, t+n-1]}[N^{[t, t+n-1]}(\lambda)]=H_t(A).$$

в) Определяется энтропия в момент t канала, питающегося источником A, на выходе которого получается источник B.

Даются необходимые и достаточные условия существования этой энтропии. При незначительных ограничениях энтропия нестационарных каналов, питающихся нестационарными источниками, не зависит от t (как и у стационарных каналов, питающихся стационарными источниками).

Приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы система источник — канал обладала свойством $\mathrm{E}_t(A/B)$, аналогичным свойству $\mathrm{E}_t(A)$ (см. б).

Отсюда получаются необходимые и достаточные условия в стационарном случае. Определяется некоторый класс регулярных каналов и регулярных источников, с помощью которых определяется регулярная пропускная способность регулярного канала. Для регулярных каналов доказываются две основные теоремы Шенона (для регулярной пропускной способности).

СЕКЦИЯ ТОПОЛОГИИ

С. О. Альбер (*Томск*). **Периодическая задача вариационного исчисления в целом на сферических многообразиях.** Пусть M^n—трижды непрерывно дифференцируемое риманово многообразие, гомеоморфное n-мерной сфере и удовлетворяющее обычному метрическому ограничению М. Морса: существует гомеоморфизм M^n на сферу, при котором отношение соответствующих линейных элементов заключено между h и $H<2h$.

Л. А. Люстерник, применяя созданный им новый гомологический метод решения задач вариационного исчисления в целом, доказал, что на M^n существует не менее $n+1$ геометрически различных замкнутых геодезических. При $n=2^k$ оценку удалось улучшить до $2n-1$. Используя гомологический метод Л. А. Люстерника, докладчик получил новую оценку числа замкнутых геодезических на M^n.

Доказано, что если $n=2^k+S(S<2^k)$, то на M^n существует не менее $2n-1-S$ геометрически различных замкнутых геодезических; нижняя грань полученной оценки имеет порядок $^3/_2n$. Алгебраическое число замкнутых геодезических на M^n не меньше $\frac{n(n+1)}{2}$. Последняя оценка совпадает с оценкой М. Морса, но получена значительно более простым способом.

И. Н. Врублевская (*Ленинград*). **О ремонтируемых схемах.** Конечный связный граф без петель называется *схемой*. Элементы схемы—вершины и ребра.

Схему называем *к*-*ремонтируемой* ($\kappa=1,2,\ldots$), если после удаления произвольных κ ее элементов любые две оставшиеся вершины можно соединить некоторым путем; κ-ремонтируемую схему назовем минимальной, если она имеет наименьшее возможное при данном числе вершин число ребер.

Теорема 1. Для того, чтобы схема была κ-ремонтируемой, необходимо и достаточно, чтобы любые две ее вершины можно было соединить по крайней мере $\kappa+1$ взаимно не пересекающимися путями.

Теорема 2. Из минимальной 2-ремонтируемой схемы с N вершинами, при $N\geqslant 4$, посредством соединения середин любых двух ребер новым ребром получается минимальная 2-ремонтируемая схема с $N+2$ вершинами.

Теорема 3. Любую минимальную 2-ремонтируемую схему с N вершинами, при $N>5$, можно получить из некоторой минимальной 2-ремонтируемой схемы с $N-2$ вершинами посредством соединения середин двух ребер новым ребром.

Работа возникла в связи с докладом М. М. Лебедева на Всесоюзной топологической конференции 1950 г.

Л. В. Келдыш (*Москва*). **О представлении открытых отображений, повышающих размерность в виде суперпозиций.** 1. Примеры нульмерных открытых отображений, повышающих размерность. Нульмерные открытые отображения n-мерного континуума на $n+\kappa$-мерный куб.

2. Представление нульмерных открытых отображений в виде конечного числа суперпозиций двукратных отображений и отображений, не повышающих размерность.

3. Различные способы представления непрерывных отображений в виде суперпозиций, повышающих размерность.

Р. Ю. Мацкина (*Глазов*). **Непрерывные отображения гильбертова пространства.** 1. Существование непрерывного образа гильбертова пространства, содержащего замкнутое в нем множество, гомеоморфное произвольному заданному A-множеству.

2. Существование непрерывного взаимно-однозначного образа гильбертова пространства, которое является B-множеством класса α, где α—произвольное трансфинитное число второго класса, большее единицы.

3. Существование универсального отображения гильбертова пространства H в себя, т. е. такого отображения, что, каково бы ни было A-множество E, в любой окрестности пространства H найдется замкнутое множество, образ которого гомеоморфен E.

К. А. Ситников (*Москва*). **О метрико-топологических свойствах замкнутых множеств.** В докладе излагаются теоремы, выражающие связь некоторых топологических инвариантов замкнутых множеств с метрическими свойствами дополнительного пространства. Далее рассматривается поведение метрических свойств циклов при непрерывных отображениях многообразий.

А. Д. Тайманов (*Кзыл-Орда*). **О распространении непрерывных отображений в открытые.** 1. Пусть X_0—некоторое подпространство пространства X, а f— го непрерывное отображение в пространство Y. Распространением на X отображения f называется такое непрерывное отображение $F(x)$ пространства X в пространство Y, что для любой точки $x \in X_0$, $f(x) = F(x)$.

Теорема 1. Пусть f—непрерывное отображение компакта X, лежащего в кубе I_n и нигде не плотного в I_n, на компакт $Y \subset I_m$. Тогда существует такое множество E типа F_σ, содержащее множество X и содержащееся в I_n, и такое непрерывное открытое отображение F множества E на Y, что $F(x) = f(x)$ при всех $x \in X$ и $F(E) = Y$.

Следствие. Существует плоское множество типа F_σ, открытый образ которого есть куб размерности $n \geqslant 3$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A} = \{X\}$—семейство подмножеств пространства H, инвариантное относительно гомеоморфных преобразований и счетного сложения. Тогда всякое множество, являющееся непрерывным образом множества $X \in \mathfrak{A}$, будет открытым образом множества из $\mathfrak{A}$ (может быть, отличного от X).

Следствие 1. Всякое В-множество является счетно-кратным открытым образом множества типа $F_\sigma \cap G_\delta$.

Следствие 2. Всякое A-множество E является открытым образом множества типа $F_\sigma \cap G_\delta$ (теорема Л. В. Келдыш).

Следствие 3. Всякое проективное множество типа A_2 есть счетно-кратный открытый образ множества типа CA.

2. Определение. Непрерывное отображение f пространства X на пространство Y назовем изолированным, если каждое множество $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, содержит хотя бы одну изолированную точку.

Теорема 3. Если семейство подмножеств $\{N\}$ гильбертова пространства H, содержащее все замкнутые и все открытые множества, инвариантно относительно топологического преобразования, а также операций счетного сложения и пересечения, то оно инвариантно относительно открытого изолированного отображения f, т. е. из $X \in \{N\}$ следует $f(X) \in \{N\}$.

Следствие 1. Изолированное открытое отображение f произвольного B-множества не повышает его класса.

Следствие 2. Изолированный открытый образ проективного множества типа CA_n есть проективное множество типа CA_n.

Следствие 3. Пусть $\{N\}$—класс множеств и $\{M\}$—класс множеств, полученных применением δs-операции Φ_N к множествам из $\{N\}$. Если δs-операция Φ_N

такова, что класс $\{M\}$ инвариантен относительно счетного сложения и пересечения, то открытый изолированный образ множества из $\{M\}$ есть множество из $\{M\}$.

Следствие 4. Размерность пространства X не повышается при изолированном открытом отображении.

Следствие 5. Счетно-кратное открытое отображение множества типа G_δ не повышает размерности множества.

Это утверждение является усилением известной теоремы П. С. Александрова о неповышении размерности при счетно-кратном открытом отображении множеств первого класса. Его нельзя усилить, ибо существует плоское множество типа F_σ, открытый образ которого имеет размерность $n \geqslant 3$.

Доказательства теорем 2 и 3 опубликованы в Математическом сборнике (т. 37 (79): 2 (1955), стр. 293—300).

Доказательство теоремы 1 публикуется в Ученых записках Шуйского пединститута.

Б. А. рахтенброт (*Пенза*).? **Применение некоторых топологических инвариантов для синтеза двухполюсных контактных схем.** Пусть R — контактная двухполюсная схема, реализующая функцию алгебры логики f. Вершины этой схемы, отличные от ее полюсов, а также от полюсов ее нетривиальных двухполюсных подсхем, называются вполне внутренними. Граф, состоящий из всех звезд при вполне внутренних вершинах схемы, называется ядром этой схемы. В классе бесповоротных схем (т. е. таких, в которых число контактов равняется числу аргументов функции f) ядро схемы является топологическим инвариантом при переходе от схемы R к любой другой схеме R', реализующей ту же функцию f. Инвариантность ядра, а также инвариантность расчленения бесповторной схемы на двухполюсные подсхемы могут быть использованы для синтеза схем и в первую очередь — бесповторных.

Дается описание алгоритма для синтеза контактных бесповторных схем. Из этого алгоритма можно извлечь также приемы синтеза более обширного класса схем. Приводятся количественные оценки, характеризующие объем испытаний, потребный для реализации предлагаемых алгоритмов.

Л. А. Тумаркин (*Москва*). **Об универсальных метрических пространствах.** П. С. Урысон [1] построил универсальное метрическое пространство U со счетной базой, содержащее изометрический образ всякого метрического пространства со счетной базой. При этом множество $S(x, \varepsilon)$ всех таких точек y пространства U, что $\rho(x, y) = \varepsilon$ является универсальным пространством для метрических пространств диаметра $\leqslant 2\varepsilon$ со счетной базой.

Возникает вопрос, существует ли компактное метрическое пространство, содержащее изометрически всякое компактное метрическое пространство диаметра $\leqslant d$ $(d > 0)$. Ответ отрицательный.

Указываются также некоторые проблемы, например: можно ли построить конечномерное универсальное метрическое пространство со счетной базой для метрических пространств размерности $\leqslant n$ $(n \geqslant 0)$ со счетной базой?

Лит.: 1. Urysohn P., Bull. Sci. math., 51 (1927), 1—38. 2. Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. II, ГИТТЛ, 1951, стр. 747—777.

Г. С. Чогошвили (*Тбилиси*). **Обобщенные спектры и их применения в теории гомологий.** В некоторых вопросах теории гомологий наряду с обычными спектрами встречаются более общие прямые и обратные системы групп. В докладе рассмотрены такие системы и их гомологические приложения. Путем сведения обобщенных систем к теории обычных спектров вводится понятие так называемого r-мерного гомологического агрегата пространства. В частности, рассмотрены гомологические агрегаты групп, основанные на бесконечных цепях и конечных коцепях бесконечных покрытий пространств, и выполнимость для них аналогов аксиом Эйленберга—Стинрода. Наконец, даны применения теории агрегатов к законам двойственности различных типов;

А. С. Шварц (*Москва*). **Гомологии некоторых пространств отображений.** Пусть M — односвязное компактное многообразие, L — пространство замкнутых путей в M. Поставив в соответствие каждому замкнутому пути его начало, получим расслоение L, базой которого является M, а слоем — пространство Ω всех путей в M, начинающихся и кончающихся в фиксированной точке. Рассмотрение спектральной последовательности этого расслоения позволяет исследовать гомологии пространства L.

Обозначим через N подмножество пространства L, состоящее из всех стационарных путей. Можно показать, что группы гомологии пространства L по модулю N не могут быть все тривиальными. Отсюда сразу следует теорема Люстерника—Фета: на любом компактном римановом многообразии существует по крайней мере одна замкнутая геодезическая.

Если многообразие M гомеоморфно n-мерной сфере, то гомологии пространства L и его гомологии по модулю N могут быть полностью вычислены.

Аналогичным способом можно исследовать пространства отображений сфер, тесно связанные с многомерными вариационными задачами.

А. С. Шварц (*Москва*). **Гомологии пространств замкнутых кривых на сферах.** Чтобы оценить число замкнутых геодезических на римановом многообразии M, Морс [1] ввел понятие круговых чисел связности (circular connectivities) многообразия M. Показывается, что k-мерное круговое число связности многообразия M равно рангу k-мерной группы гомологий mod 2 пространства всех замкнутых кривых многообразия M по модулю подмножества одноточечных кривых.

Морс нашел круговые числа связности для сферы, однако его вычисления ошибочны (так же как и вычисления Ботта [2]).

Морс использовал утверждение, что типовые числа невырожденной замкнутой геодезической все равны нулю, кроме одного, равного единице. Это утверждение корректно доказано Морсом лишь для простой (не кратной) геодезической. Уже для двукратной геодезической оно неверно. Можно, однако, показать, что типовые числа невырожденной геодезической по полю рациональных чисел все равны нулю, кроме, быть может, одного (Морс рассматривал типовые числа по модулю 2).

Группы гомологий пространства замкнутых кривых на сфере по полю рациональных чисел могут быть вычислены с помощью некоторых спектральных последовательностей.

Л и т.: 1. M o r s e M., Amer. Math. Soc. Publ., vol. XVIII, (1934). 2. B o t t R., Ann. of Math., 60:2, (1954), 248—261.

СЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ

А. Д. Александров (*Ленинград*). **Об одном обобщении римановой геометрии.** Предмет сообщения составляют начала геометрии метрических пространств, которые естественно назвать «пространствами кривизны, не большей K». Это—пространства, у которых в некоторой окрестности всякой точки любая пара точек соединима кратчайшей, равной по длине расстоянию между этими точками, и для всякого треугольника в той же окрестности сумма его соответствующим образом определенных верхних углов не превосходит суммы углов треугольника со сторонами той же длины на «K-плоскости», т. е. на поверхности постоянной кривизны K.

Всякое риманово пространство, если в нем кривизна в направлении любой элементарной площадки ограничена некоторым числом K, оказывается пространством указанного типа. Но эти пространства могут быть не только неримановыми, но даже могут вообще не являться многообразиями. Тем не менее такие пространства имеют много далеко идущих общих свойств и их геометрия представляет довольно обширное поле для исследования.

Приведем здесь отдельные примеры результатов, справедливых в достаточно малой области любого пространства кривизны, не большей K.

Всякие две точки соединимы единственной кратчайшей. Кратчайшая непрерывно зависит от ее концов. Соединяющая те же концы кривая, по длине близкая к кратчайшей, не может от последней сильно отклоняться.

Выходящие из одной точки кратчайшие образуют определенные углы. Если вблизи точки пространство является многообразием, то из точки в каждом направлении исходит хотя бы одна кратчайшая. Каждый угол треугольника не больше соответствующего угла треугольника со сторонами той же длины на K-плоскости.

Кратчайшие, идущие из одной вершины треугольника во все точки противоположной стороны, зачерчивают «поверхностный треугольник»; при естественном сопоставлении его точкам точек треугольника на K-плоскости расстояние между точками не возрастает. В частности, срединная линия треугольника не превосходит срединной линии соответствующего треугольника на K-плоскости.

С помощью абстрактных вписанных многоугольников определяется площадь поверхностей в такого рода пространствах. При указанном выше соответствии площадь треугольника не возрастает, а ее сохранение имеет место только в случае, если это соответствие оказывается изометрическим. На любой замкнутый контур можно натянуть линейчатую поверхность, площадь которой не больше, чем площадь круга с тем же периметром на K-плоскости.

Всякая линейчатая поверхность в указанном пространстве по своей внутренней геометрии в свою очередь оказывается пространством кривизны, не большей K.

Н. М. Бескин (*Москва*). **Теоремы Чевы и Менелая в n-мерном пространстве.** 1. В n-мерном проективном пространстве R_n рассматривается невырожденный симплекс $A_0A_1 \ldots A_n$. На каждом ребре A_iA_j (ребро — вся прямая) выбирается точка A_{ij}, не совпадающая ни с одной из точек A_i и A_j. Симплекс вместе с точками A_{ij}

на всех ребрах назовем дополненным симплексом. В каждом треугольнике $A_iA_jA_k$ проведем прямые A_iA_{jk}, A_jA_{ki} и A_kA_{ij}. Если эти три прямые пройдут через одну точку, то скажем, что в треугольнике $A_iA_jA_k$ произошло явление Чевы, и эту точку обозначим через A_{ijk} (точка Чевы треугольника $A_iA_jA_k$). Если явление Чевы произойдет во всех плоских гранях симплекса, то рассмотрим все трехмерные грани. В каждом тетраэдре $A_iA_jA_kA_l$ проведем все прямые типа A_iA_{jkl} и типа $A_{ij}A_{kl}$ (всего семь прямых). Если все эти прямые пройдут через одну точку, то скажем, что в тетраэдре $A_iA_jA_kA_l$ произошло явление Чевы, и эту точку обозначим через A_{ijkl} (точка Чевы тетраэдра $A_iA_jA_kA_l$). Если явление Чевы произойдет во всех трехмерных гранях симплекса, то рассмотрим все четырехмерные грани,... и т. д. Этот процесс назовем процессом Чевы.

Поясним, что в k-мерной грани $(2 \leqslant k \leqslant n)$ мы проводим все прямые $A_{i_1i_2\ldots i_s}A_{j_1j_2\ldots j_{k-s+1}}$ $(s=1, 2, \ldots, k)$, где $i_1, i_2, \ldots, i_s$ — всевозможные сочетания из индексов $0, 1, \ldots n$, а $j_1, j_2, \ldots, j_{k-s+1}$ — сочетания остальных индексов. Процесс Чевы считается оборвавшимся, если хоть в одной k-мерной грани $(k=2, 3, \ldots, n)$ упомянутые прямые не проходят через одну точку.

2. Теорема I (теорема Чевы). Если явление Чевы произошло во всех треугольниках, то процесс Чевы не оборвется.

Таким образом, все дальнейшие пересечения гарантированы, и процесс приведет к одной точке $A_{01\ldots n}$ (точка Чевы дополненного симплекса).

Теорема II (обратная). Если даны симплекс $A_0A_1 \ldots A_n$ и точка $A_{01\ldots n}$, не принадлежащая его границе, то однозначно определяются такие дополнительные точки A_{ij} на ребрах симплекса, что данная точка $A_{01\ldots n}$ является точкой Чевы дополненного симплекса.

Теорема III (теорема Менелая). Если в каждом треугольнике $A_iA_jA_k$ дополнительные точки A_{ij}, A_{jk} и A_{ki} лежат на одной прямой, то все дополнительные точки симплекса лежат в одном R_{n-1}.

Теорема IV (обратная). Если все дополнительные точки симплекса лежат в одном R_{n-1}, то в каждом треугольнике $A_iA_jA_k$ дополнительные точки A_{ij}, A_{jk} и A_{ki} лежат на одной прямой.

Примечание. Если условия теорем I и III соблюдаются во всех треугольниках с общей фиксированной вершиной, то они соблюдаются и во всех остальных треугольниках.

М. В. Васильева (*Москва*). **Геометрическая характеристика некоторых инвариантов финслеровой геометрии.** С третьим продолжением основного уравнения, определяющего финслерово пространство, связан тензор неримановости p_{ijk} $(i, j, k=1, 2)$, обращению в нуль которого соответствует вырождение пространства в риманово. С другой стороны, известно, что финслерово пространство становится римановым, если индикатриса, связанная с каждой его точкой, — поверхность 2-го порядка с центром в этой точке Г. Ф. Лаптев [1] доказал, что поверхность 2-го порядка характеризуется обращением в нуль тензора Дарбу поверхности. Отсюда уже следует, что между тензором неримановости и тензором Дарбу индикатрисы $\tilde{p}_{ijk}$ существует зависимость. Оказывается, что она такова:

$$\tilde{p}_{ijk} = p_{ijk} - \frac{1}{2}\, p(ig_{jk}),$$

где $2p_k = g^{ij}p_{ijk}/g$, а g_{ij}, g^{ij} и g — метрический тензор финслерова пространства и его дискриминант.

Обращение в нуль $\tilde{p}_{ijk}$, очевидно, не приводит к риманову пространству, однако в этом случае p_k принимает простой геометрический смысл: определяет центр соответствующей индикатрисы — поверхности 2-го порядка.

Лит.: 1. Лаптев Г. Ф., ДАН СССР, 65, № 2, (1949).

А. М. Лопшиц (*Москва*). **Некоторые вопросы проективной, аффинной и начертательной геометрии в безразмерном пространстве.** В проективном безразмерном пространстве, точки которого задаются с точностью до произвольного скалярного множителя векторами линейной безразмерной алгебры [1], устанавливается, что всякая невырожденная коллинеация может быть осуществлена линейным векторным оператором. В аффинном безразмерном ω-пространстве (точки которого суть точки проективного безразмерного пространства, не принадлежащие некоторой выбранной гиперплоскости ω) устанавливается аналогичная теорема для ω-аффинитета (т. е. коллинеации, переводящей точки гиперплоскости ω в точки этой же плоскости), быть может и вырожденного. т. е. переводящего прямую либо в прямую, либо в точку.

Две коллинеации назовем аффинно подобными, если создаваемые ими два изображения некоторой произвольной совокупности точек могут быть поставлены в аффинное соответствие. Устанавливается, что всякое проективное преобразование аффинно подобно гомологической коллинеации (в случае трехмерного аффинного пространства приходим к «основной теореме центральной аксонометрии» Бескина [2]).

Два ω-аффинных преобразования в пространстве с билинейной метрикой называются метрически подобными, если создаваемые ими два изображения произвольной совокупности точек метрически подобны. Доказывается, что в n-мерном аффинном пространстве всякое аффинное преобразование метрически подобно перспективному преобразованию порядка $\varepsilon\left(\frac{n}{2}\right)$. (В случае трехмерного эвклидова пространства приходим к «основной» теореме параллельной аксонометрии Польке—Шварца—Глаголева [3]).

Лит.: Лопшиц А. М., Труды сем. по вект. и тенз. анализу, вып. VI, (1948), 365—419. 2. Бескин Н. М., Матем. сб., 19 (61):1, (1946), 57—72. 3. Глаголев Н. А., Матем. сб., 32, вып. 3, (1925).

В. С. Малаховский (*Томск*). **Точечное взаимно-однозначное соответствие двух поверхностей с заданным свойством соприкасающихся квадрик С. Ли.** 1. В работе изучается точечное взаимно-однозначное соответствие двух поверхностей s и $\bar{s}$, при котором соприкасающиеся квадрики С. Ли Q и $\bar{Q}$, присоединенные к поверхностям в соответствующих точках, касаются друг друга вдоль общей образующей. Исследование проводится методом подвижного репера и внешних дифференциальных форм с использованием инвариантного дифференциально-геометрического метода Г. Ф. Лаптева.

2. Доказывается существование пяти классов поверхностей, допускающих указанное соответствие, не считая фокальных поверхностей конгруенции А. М. Васильева.

Поверхности первого и второго классов суть поверхности F_1, поверхности остальных классов—линейчатые, причем поверхности третьего класса являются линейчатыми поверхностями R с совпадающими директрисами.

3. Дается геометрическая характеристика пары соответствующих друг другу поверхностей каждого класса. Асимптотические линии одного семейства на каждой из поверхностей s и $\bar{s}$ первого и второго классов соответствуют друг другу и принадлежат одному и тому же линейному комплексу. Первые и вторые директрисы Вильчинского, построенные в соответствующих точках поверхностей s и $\bar{s}$ второго класса, пересекают линию прикосновения квадрик Ли Q и $\bar{Q}$, не изменяющую своего положения вдоль асимптотических, принадлежащих линейным комплексам. Пара соответствующих поверхностей s и $\bar{s}$ третьего класса принадлежит одной и той же линейной конгруенции, обе директрисы которой совпадают с линией прикосновения квадрик Ли Q и $\bar{Q}$.

4. Рассмотрен более общий случай соответствия между двумя поверхностями s и $\bar{s}$, когда соприкасающиеся квадрики Ли Q и $\bar{Q}$, построенные в соответствующих точках, имеют одну или две общие образующие.

Е. А. Морозова (*Москва*). **О корректной жесткости поверхностей.** В безмоментной теории тонких оболочек смещение $\bar{z}$ точек при деформации определяется из уравнения

$$d\bar{x}\cdot d\bar{z}=\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \qquad (i,\ j=1,\ 2), \tag{1}$$

где ε_{ij}—тензор деформации, характеризующий изменение внутренней метрики поверхности $\overline{x}$ при деформации. Тензор ε_{ij} определяетя из уравнений равновесия с учетом обобщенного закона Гука.

Однородное уравнение

$$d\overline{x}\cdot d\overline{z}=0, \tag{2}$$

соответствующее уравнению (1), является уравнением бесконечно малого изгибания поверхности. Тип уравнений (1) и (2) определяется знаком полной кривизны поверхности.

Очевидно, что уравнение (1) при данных краевых условиях имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение (2) с нулевыми краевыми условиями имеет только тривиальные решения, т. е. поверхность $\overline{x}$ (x_1x_2) является жесткой.

Такое определение геометрической жесткости поверхности может не соответствовать механической жесткости оболочки, если

1) нет непрерывной зависимости решения от краевых условий,

2) нет непрерывной зависимости решения от правой части.

Так, например, полный тор геометрически жесток, но условие 2) не имеет места. Поэтому естественно уточнить определение жесткости и говорить о «корректной» жесткости тогда, когда решение соответствующей задачи для уравнения (1) непрерывно зависит как от краевых условий, так и от правой части.

А. З. Петров (*Москва*). **О пространствах, определяемых полями тяготения.** 1. Уравнение поля тяготения в области, не содержащей массы, имеет вид

$$R_{\alpha\beta}=0 \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ 4). \tag{1}$$

Изучением римановых пространств, определяемых этими уравнениями, занимались многие авторы с момента появления основной работы Эйнштейна в 1915 г. и по настоящее время и существует много частных решений уравнений (1) (решение Шварцшильда, Вейля, Леви-Чивита, Картана, Бринкмана, Казнера, Папапетру и т. д.). История этого вопроса показывает, что не было сделано попытки дать общую классификацию возможных решений. Мы даем такую классификацию, положив в основу алгебраическую структуру кривизны, с одной стороны, и группы движений—с другой.

2. Метрика искомых v_4, соответствующая реальному распределению материи, задается формой $ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$, определяющей в каждой точке геометрию Минковского (сигнатура $---+$), при условии, что потенциалы $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют (1). Сопоставляя каждой точке P нашего v_4 локальное центро-аффинное многообразие шести измерений, векторами которого служат бивекторы $(v_4)_P$, рассмотрим пару симметрических тензоров этого бивекторного пространства R_{ab} и g_{ab} $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$, соответствующих тензору кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и тензору $g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}$. Изучая матрицу $\|R_{ab}-\lambda g_{ab}\|$, можно показать, что, во-первых, $\|R_a b\|$—симметрично сдвоенная матрица и, как следствие отсюда, что эта матрица может быть только трех возможных типов, в зависимости от своей характеристики и типа элементарных делителей: с характеристикой простого типа $[111,\ \overline{111}]$ и не простого типа $[21,\ \overline{21}]$, $[33]$. Числа с чертой сверху означают комплексно сопряженные базисы элементарных делителей.

Исследование показало, что почти все известные решения принадлежат первому типу, именно, $[(11)\ 1,\ (11)\ 1]$, причем элементарные делители вещественные; кроме того, в этих решениях налагаются еще довольно жесткие дифференциальные ограничения. Вообще первый тип полей тяготения характерен для статических полей и полей, возникающих в небесной релятивистской механике. Решения второго и третьего типов, найденные нами, в литературе до сих пор не рассматривались.

3. Все физически интересные решения уравнений поля (1) допускают группу движений. Поэтому, как следующий шаг в классификации полей тяготения, пространства каждого типа исследовались нами с групповой точки зрения. Исследуя уравнения движений Киллинга для пространства каждого типа, мы получим, с точностью до

подобия (преобразования координат), решения уравнений поля (1), допускающие группу того или иного порядка, при этом для полей первого типа пространством максимальной подвижности является пространство специальной теории относительности с 10-членной группой; для второго типа

$$ds^2 = -dx_1^2 - \sin^2 v\, dx_2^2 - \sin^2 v\, dx_3^2 + dx_4^2, \qquad (v = x_1 + x_4),$$

с разрешимой, транзитивной, 6-членной группой, для третьего типа получаем линейный элемент, допускающий разрешимую группу G^3. Можно дать решения каждого типа для различных подгрупп максимальной группы.

4. Изучение полей тяготения с точки зрения указанной выше классификации позволяет сделать физические выводы. Например, можно доказать, что в полях тяготения может существовать гармоническая функция, зависящая только от расстояния, лишь в тривиальном случае пространств постоянной кривизны, т. е. законы, аналогичные законам Кулона, в общем случае не могут быть положены в основу. Далее, для полей второго типа характерно, что его потенциалы, в случае максимальной подвижности, удовлетворяют волновому уравнению, и здесь следует ожидать наличия осциллятора. Можно показать также, что пространства второго и третьего типов ни при каких значениях координат не стремятся к плоскому пространству специальной теории относительности и т. д.

З. И. Прянишникова (*Москва*). **Об одном обобщении метода Е. С. Федорова в начертательной геометрии.** 1. Рассматривая вопрос об отображении пространства n измерений на плоскости, Е. С. Федоров детально разработал метод изображения трехмерного пространства при помощи упорядоченных пар точек плоскости с параллельными линиями связи. Пространство четырех измерений Е. С. Федоров изображал упорядоченными парами точек плоскости.

2. Настоящий способ является обобщением метода Е. С. Федорова на пространство n измерений, который заключается в изображении n-мерного пространства системами $(n-1)$ коллинейных точек плоскости с параллельными линиями связи.

3. Необходимый для этого проектирующий аппарат состоит из несобственных центральных пространств $\Pi_{\infty_i}^{n-3}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$, лежащих в одном пространстве Π_∞^{n-2}, и плоскости проекций Π^2.

4. В частности, в четырехмерном пространстве Π^4 проектирование производится из трех несобственных компланарных центральных прямых, что приводит к изображению точек пространства Π^4 тройками коллинейных точек с параллельными линиями связи.

5. Рассматриваемый способ применяется к решению некоторых геометрических и прикладных задач.

П. К. Рашевский (*Москва*). **О линейных представлениях однородных пространств.** Исследуются условия, при которых (локальные) однородные пространства, заданные группой G и стационарной подгруппой H, допускают реализацию на поверхности транзитивности в некотором линейном представлении группы G.

С. В. Смирнов (*Москва*). **О номографируемости в целом и локальной номографируемости.** Задача об общей анаморфозе для функции $z = \varphi(x, y)$, заданной в области G плоскости x, y, сведена Гронваллом к задаче о совместности специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. Гронваллом показано, что функция $z = \varphi(x, y)$ представляется номограммой из выравненных точек тогда и только тогда, когда в G совместна система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) - C\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right) - D\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right) = 0,$$

$$D = MC + N,$$

где

$$M = -\varphi_y/\varphi_x, \qquad N = M_2 + M_y/M.$$

Оказывается, что в том случае, когда $P = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \ln|M|$ отлично от тождественного нуля в каждой подобласти области G, функция Гронвалла $C = C(x, y)$ может быть найдена как общий корень системы полиномов относительно C, коэффициенты которых рационально выражаются через M, P и их частные производные.

Существенную роль в теории общей анаморфозы играет понятие номографического инварианта. Назовем, следуя М. А. Крейнесу, «допустимым преобразованием» обратимое преобразование $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, $Z = Z(z)$, где правые части — достаточное число раз дифференцируемые функции своих аргументов, причем точка x, y пробегает область G, а переменная z изменяется в промежутке, содержащем область значений $z = \varphi(x, y)$.

Рациональная функция $R(M, M_x, \ldots)$ от M, а также от производных M называется номографическим инвариантом, если при любом допустимом преобразовании, переводящем уравнение $z = \varphi(x, y)$ в уравнение $Z = \Phi(X, Y)$, справедливо тождество

$$R(M, M_x, \ldots) = \left(\frac{dX}{dx}\right)^{\alpha} \left(\frac{dY}{dy}\right)^{\beta} R(\overline{M}, \overline{M}_x, \ldots,),$$

где $\overline{M} = -\Phi_y/\Phi_x$, α, β — целые числа.

Называя две номограммы эквивалентными в том случае, если найдется допустимое преобразование, переводящее одну номограмму в другую, мы очевидным образом относим к одному и тому же классу эквивалентности номограммы с общим скелетом (с точностью до проективного преобразования). Отсюда следует, что номографические инварианты описывают различные скелетные свойства номограмм, в частности сюда относится вопрос о существовании номограммы из выравненных точек для данной функции $z = \varphi(x, y)$ и о жанре этой номограммы. Следовательно, необходимые и достаточные условия общей анаморфозы, а также условия существования номограммы определенного жанра могут быть выражены в инвариантной форме.

Пользуясь понятием номографического инварианта, локальным теоремам о номографируемости с точностью до малых данного порядка можно придать инвариантную форму.

Г. С. Хованский (*Москва*). **О представлении некоторых зависимостей с четырьмя переменными номограммами с ориентированным транспарантом.** В докладе рассмотрено построение номограмм с ориентированным транспарантом для следующих типовых зависимостей с четырьмя переменными:

$$f_3 = F(f_{12} + f_4,\ g_{12} + g_4), \tag{1}$$

$$\varphi_3 = \Phi(\varphi_{12}\varphi_4,\ \psi_{12}\psi_4), \tag{2}$$

$$f_4 + F(\alpha_3,\ g_{12}) + f_{12} = 0, \tag{3}$$

$$\varphi_{12}\varphi_4 = \Phi(\alpha_3,\ \psi_{12}), \tag{4}$$

$$A(\alpha) + B(\beta)\,C(\gamma, \delta) + D(\gamma, \delta) = 0. \tag{5}$$

Зависимости (1)—(5) допускают построение легко приспособляемых номограмм с ориентированным транспарантом, имеющим одну шкалу и две фиксированные точки. На неподвижной плоскости во всех случаях располагаются три семейства помеченных линий, которые всегда можно расположить так, чтобы они не пересекали друг друга. Шкала на транспаранте для зависимостей (1) и (2)—криволинейная, а для зависимостей (3), (4), (5)—прямолинейная.

Наибольшими возможностями для приспособляемости номограмм обладают зависимости (3), (4), (5), что связано с возможностью введения в уравнения элементов соответствующих номограмм двух произвольных функций.

Для канонической формы Коши с бинарным полем (5) оказывается возможным построение номограмм с ориентированным транспарантом четырех различных типов, поскольку соотношение (5) можно записать в виде

$$B(\beta)+\frac{A(\alpha)}{C(\gamma,\delta)}+\frac{D(\gamma,\delta)}{C(\gamma,\delta)}=0 \tag{6}$$

и рассматривать соотношения (5) и (6) как частные случаи канонических форм (3) или (4).

В докладе приведены примеры рабочих номограмм для зависимостей, приводящихся к каноническим формам (1)—(5).

И. М. Яглом. (*Москва*). **О двумерных неэвклидовых геометриях.** 1. На плоскости можно определить девять различных неэвклидовых геометрий—проективных мероопределений Кели—Клейна, отвечающих трем типам мероопределения на прямой линии и трем типам мероопределения в пучке прямых. Эти девять неэвклидовых геометрий можно определить или исходя из схемы Кели—Клейна, или алгебраически—тремя различными формулами для расстояния на плоскостях комплексного, двойного и дуального переменного.

2. Последнее алгебраическое определение весьма удобно для того, чтобы находить аналитические соотношения, выполняющиеся в этих геометриях. Так, например, исходя из них, можно выписать основные формулы тригонометрии треугольника для всех девяти геометрий, позволяющие развивать любую из них столь же далеко, как это уже сделано в отношении эвклидовой геометрии или гиперболической геометрии Лобачевского. Нетрудно показать на примерах, как трансформируются в различных геометриях привычные эвклидовы теоремы.

3. Аналитические методы, связанные с привлечением комплексных чисел, весьма удобны для определения кривых постоянной кривизны (циклов) во всех девяти геометриях и для исследования их свойств. В частности, на этом пути легко получить геометрические описания преобразований Мебиуса и Лагерра, во всех случаях сводящиеся к своеобразным «инверсиям». Не представляет большого труда также определение пучков и связок циклов и построение во всех девяти геометриях развитой «теории циклов»; значительную помощь здесь могут оказать «стереографические проекции», отображающие циклы плоских неэвклидовых геометрий на точки трехмерных пространств.

4. Особый интерес может представлять вырожденная «дважды параболическая геометрия, весьма простые теоремы которой могут быть интерпретированы как теоремы классической кинематики.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ

А. В. Кузнецов (*Москва*). **О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем.** Исследуется ряд алгоритмических проблем для алгебраических систем (или, короче, алгебр), т. е. пар $\mathfrak{A}=\langle M, F\rangle$, состоящих из некоторого множества M и некоторого множества F операций, определенных (всюду) в M.

Для каждой конечно-порожденной алгебры (т. е. алгебры с конечным числом операций и образующих) ставятся обычная проблема тождества, а также сильная проблема тождества, связанная с распознаванием равенств, содержащих, кроме образующих, еще и переменные. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется проверяемой, если для каждой пары неравных элементов $a, b \in M$ существует такой гомоморфизм φ, что $\varphi(M)$ — конечное множество и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Конечно-порожденная алгебра называется конечно-определенной, если она задается конечной системой определяющих соотношений, содержащих вообще и переменные. Строится алгоритм, решающий проблему тождества для всех проверяемых конечноопределенных алгебр. Дается ряд примеров локально проверяемых алгебр, в числе которых, например, все нильпотентные группы. Затем следует теорема:

Если $\mathfrak{A}$ — конечно порожденная алгебра, то разрешимость проблемы тождества для нее эквивалентна существованию такой циклической группы $\mathfrak{B}$ и такой конечно-определенной алгебры $\mathfrak{C}$, что $\mathfrak{C}$ накрывает и $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (Говорим, что алгебра $\mathfrak{A}_1=\langle M_1, F_1\rangle$ накрывает алгебру $\mathfrak{A}_2=\langle M_2, F_2\rangle$, если $M_1=M_2$ и $F_1 \supseteq F_2$.)

Приводятся некоторые результаты и для сильной проблемы тождества и родственных ей вопросов, в числе которых вопрос о том, существует ли для данной алгебры $\mathfrak{A}$ такая конечная система тождественных соотношений, что все остальные, верные в $\mathfrak{A}$, — ее следствия; если существует, то $\mathfrak{A}$ называется конечно тождественной. Отмечается трудность этих вопросов даже для конечных алгебр с одной бинарной операцией, среди которых, как видно из одной работы Линдона, не все конечно тождественны.

Алгебра $\mathfrak{A}=\langle M, F\rangle$ называется (функционально) полной (соответственно слабо полной), если всякая операция, которую можно определить в M, представима через те из них, которые принадлежат F (соответственно, через них и константы), т. е. если всякая алгебра, которая накрывает $\mathfrak{A}$, является производной из $\mathfrak{A}$. Дается алгоритм для распознавания полноты конечных алгебр (с конечным числом операций) и исследуются вопросы, связанные с его упрощением. При этом выявляется потребность изучения множества Π_M всех таких алгебр $\mathfrak{A}=\langle M, F\rangle$, которые функционально замкнуты (т. е. накрывают все свое производные) и предполные (т. е. неполны, но не накрываются никакой неполной алгеброй, кроме производных из $\mathfrak{A}$). Оказывается, что:

1) если M конечно, то и Π_M конечно;

2) для того чтобы конечная алгебра $\mathfrak{A}=\langle M, F\rangle$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы никакая алгебра из Π_M не накрывала $\mathfrak{A}$;

3) всякая полная конечная алгебра является конечно тождественной;

4) для того чтобы группа (кольцо) $\mathfrak{A}$ из более чем одного элемента была слабо полной, необходимо и достаточно, чтобы она была конечной, простой и не абелевой (соответственно, $\mathfrak{A}^2 \neq 0$).

Что же касается проблемы распознавания предполноты для конечных алгебр, то пока неизвестно, существует ли для нее общий алгоритм; доказывается лишь (неконструктивно) существование частного алгоритма для каждого фиксированного конечного M.

О. Б. Лупанов (*Москва*). **О возможностях синтеза схем из произвольных элементов.** При исследовании возможностей реализации контактными схемами функций алгебры логики Шенноном была введена функция $L(n)$—минимальное число контактов, достаточное для реализации любой функции алгебры логики, зависящей от n аргументов, и было показано, что для любого $\varepsilon > 0$ и $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $L(n) > \frac{2^n}{n}(1-\varepsilon)$. Шеннон показал также, что доля функций от n аргументов, для реализации которых требуется не более $\frac{2^n}{n}(1-\varepsilon)$ контактов, неограниченно убывает с ростом n. Здесь эти результаты обобщаются на случай схем, построенных из произвольных элементов (определения см. ДАН СССР, **103**, № 4, (1955), 561). Оказывается, что при естественных предположениях оценка снизу для функции $L'(n)$, определяемой по аналогии с $L(n)$, не может быть существенно понижена. Например:

1) в случае реализации функций алгебры логики многотактными релейно-контактными схемами как функций проводимости после перехода схемы в устойчивое состояние

$$L'(n) > \frac{1}{3}\frac{2^n}{n}(1-\varepsilon),$$

где $L'(n)$ — число всех контактов;

2) в случае реализации электронными схемами

$$L'(n) > \frac{2}{3}\frac{2^n}{n}(1-\varepsilon),$$

где $L'(n)$ — число сеток;

3) в случае реализации схемами из контактов и сопротивлений, если используется $e^{o(n)}$ сортов сопротивлений и реализуемая функция есть монотонная функция напряжения между некоторой парой узлов схемы $L'(n) > \frac{2^n}{n}(1-\varepsilon)$, где $L'(n)$ есть общее число контактов и сопротивлений.

А. А. Марков (*Москва*). **Об одном принципе конструктивной математической логики.** 1. Следующий принцип, называемый в дальнейшем «ленинградским принципом», следует признать принадлежащим конструктивной математической логике.

1.1. Если имеется алгорифм, позволяющий выяснить для любого натурального числа, обладает ли оно свойством С, и если опровергнуто предположение о несуществовании натурального числа со свойством С, то существует натуральное число со свойством С.

2. Ленинградский принцип равносилен каждому из следующих утверждений.

2.1. Для того чтобы какое-нибудь множество натуральных чисел было рекурсивным, необходимо и достаточно, чтобы как оно само, так и его дополнение было рекурсивно перечислимыми.

2.2. Всякое рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел совпадает с дополнением своего дополнения.

2.3. Всякая формула вида

$$(\forall x (P \vee \neg P) \supset (\neg \neg \exists x P \supset \exists x P)), \tag{1}$$

где x—переменная, P—формула логико-арифметического исчисления Клини ([1], стр. 69—85), реализуема ([1], стр. 501—516).

3. Ленинградский принцип необходим для ряда доказательств, проводимых в теории рекурсивно перечислимых множеств. Он в частности, применяется (в неявном виде) в доказательстве теоремы Майхилла [2] об изоморфии творческих множеств.

4. Можно рассматривать (1) и как формальную схему чистого исчисления предикатов [1], стр. 142, 143), если условиться подставлять вместо P любую формулу этого исчисления. На вопрос о выводимости представляемых этой схемой формул в так называемом чистом интуиционистском исчислении предикатов ([1], стр. 101, 142, 143) может быть дан отрицательный ответ. В частности, формула

$$(\forall a(A(a) \vee \neg A(a)) \supset (\neg\neg \exists aA(a) \supset \exists aA(a)))$$

не выводима в чистом интуиционистском исчислении предикатов.

Таким образом, присоединение схемы (1) к чистому интуиционистскому исчислению предикатов в качестве новой схемы аксиом дает существенно новое исчисление. Вместе с тем это присоединение не отражается на совокупности выводимых формул исчисления высказываний и, в частности, не делает выводимым закон исключенного третьего.

Лит.: 1. Kleene S. C., Introduction to metamathematics, Amsterdam, 1952. 2. Myhill J. R., Zeitschr. f. math. Logik, 1:2, (1955), 97—108.

Н. М. Нагорный (*Ленинград*). **О некоторых обобщениях понятия нормального алгорифма.** Рассматриваются некоторые естественные обобщения понятия нормального алгорифма: алгорифмы типов σ, σ' и σ''. Основная особенность этих алгорифмов состоит в том, что на каждом шаге работы алгорифма не только вырабатывается некоторое слово, но и указывается схема, которую надлежит применять на следующем шаге. У алгорифмов типа σ набор применяемых схем конечен; у алгорифмов типа σ' он порождается алгорифмически; у алгорифмов типа σ'' набор схем также порождается алгорифмически, а каждая схема «бесконечна»: формулы ее вырабатываются некоторым алгорифмом.

Устанавливается эквивалентность понятий алгорифмов типов σ, σ' и σ'' понятию нормального алгорифма, что может рассматриваться как дополнительный аргумент в пользу принципа нормализации.

Алгорифмы типа σ интересны и в других отношениях:

1) легко строятся многие конкретные алгорифмы типа σ,

2) сравнительно просто доказываются теоремы сочетания алгорифмов типа σ,

3) доказанная без ссылки на какие-либо теоремы сочетания нормальных алгорифмов эквивалентность понятий нормального алгорифма и алгорифма типа σ позволяет использовать алгорифмы типа σ в качестве инструмента для доказательства различных теорем о сочетании нормальных алгорифмов.

Ю. А. Рожанская (*Москва*). **Об эквивалентности двух определений полноты системы аксиом.** При теоретико-множественном обосновании математики, основанном на понятии изоморфизма (А. Колмогоров, БСЭ), возникают два по форме различных определения полноты системы аксиом.

А) Система аксиом полна, если к ней нельзя добавить ни одного предложения, выраженного в терминах тех же отношений (т. е. содержащего высказывания о тех же отношениях), без того, чтобы она не перестала быть либо независимой, либо совместной.

В) Система аксиом полна, если всякие две ее интерпретации изоморфны относительно всех отношений, определяемых данной системой аксиом.

Эти определения эквиваленты. Автору удалось установить их эквивалентность с помощью понятия x-типа (x—отношение системы), являющегося обобщением понятия порядкового типа Кантора. Это понятие, быть может, представляет и самостоятельный интерес для теоретико-множественного обоснования математики. Результат публикуется в Ученых записках Московского университета (Математика, т. VIII, 1956 г.).

Б. А. Трахтенброт (*Пенза*). **Об эффективных операторах и их свойствах, связанных с их непрерывностью.** В работе [1] были даны определения понятий примитивно-рекурсивного, постовского, обще-рекурсивного и частично-рекурсивного операторов и изучен ряд их свойств. В связи с появлением в литературе ряда других родственных понятий и результатов (Гжегорчик, Лакомб и др.) целесообразно исследовать взаимоотношение между этими различными концепциями эффективного оператора, что и делается в данном докладе.

Исследуется ряд свойств эффективных операторов, связанных с явлениями эффективной непрерывности и эффективной равномерной непрерывности. При этом существенную роль играет понятие сигнализирующей функции оператора, которую можно рассматривать как регулятор эффективной непрерывности.

Полученные результаты позволяют установить ряд родственных свойств конструктивных функций анализа в силу того, что последние являются в некотором смысле аналогами эффективных операторов.

Лит.: 1. Трахтенброт Б. А., ДАН СССР, 101, № 3, (1955).

Ю. А. Шиханович (*Москва*). **Примеры применения математической логики к алгебре.** Высказыванием мы будем называть формулу узкого исчисления предикатов без свободных переменных. Если P есть конечное множество высказываний, то класс всех моделей множества P мы назовем арифметическим классом, определенным системой P, а элементы, члены этого класса, будем называть P-моделями. Очевидно, не теряя общности, можно считать, что арифметический класс определяется одним высказыванием. Мы будем говорить, что последовательность высказываний

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

составляет возрастающую цепь, если формула $[X_n \rightarrow x_m]$ доказуема (т. е. выводима из пустого множества посылок в узком исчислении предикатов) для $n \geqslant m$.

Пусть мы имеем последовательность высказываний

$$H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots \tag{1}$$

Определим индуктивно новую последовательность:

$$\begin{cases} x_1 = H_0 \\ x_n = [x_{n-1} \,\&\, H_{n-1}] \quad (n = 2, 3, 4, \ldots). \end{cases}$$

Последовательность высказываний $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ составляет, очевидно, возрастающую цепь. Применением теоремы полноты узкого исчисления предикатов легко доказывается следующая

Пра-теорема. 1) Если некоторый арифметический класс Y содержит всякую P-модель, то он содержит и всякую X_{n_0}-модель, где n_0 — константа, зависящая от Y. 2) Если для сколь угодно большого n существует модель X_n, но не P, то класс P не есть арифметический или, иными словами, понятие P-модели не может быть формализовано конечным числом аксиом внутри узкого исчисления предикатов.

Конкретизируя последовательность (1), мы будем получать из пра-теоремы более конкретные теоремы, правда, содержащие все же еще одну «степень свободы» — высказывание, теорему Y. Например, беря в качестве (1)

$$\begin{cases} H_0 \text{ — конъюнкция аксиом поля,} \\ H_n \equiv (\exists x)(P_n x \neq 0) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

(P_n — n-е простое число), мы получим теорему Робинсона: 1) Если некоторая теорема (высказывание узкого исчисления предикатов, сформулированное в терминах $=$, $+$,) верна для любого поля характеристики 0, то она верна также и для любого поля характеристики $\geqslant P_{n_0}$ (n_0 — константа, зависящая от теоремы). 2) Понятие поля характеристики 0 не может быть формализовано конечным числом аксиом внутри узкого исчисления предикатов.

Теорема Робинсона содержится в [1], а пра-теорема получена обобщением схемы доказательства этой теоремы. Аналогично получаются, например, теоремы:

Теорема. 1) Если некоторый арифметический класс Y содержит всякое кольцо с 1 без делителей нуля характеристики $\quad \cdot 1 \neq 0$ для $n=1, 2, 3, \ldots$), то он содержит и всякое кольцо с 1 без делителей нуля характеристики $\geqslant P_{n_0}$ (n_0 зависит от Y). 2) Понятие кольца с 1 без делителей нуля не формализуется конечным числом аксиом.

Теорема. 1) Если некоторый арифметический класс Y содержит всякую структуру с 0 и 1, не имеющую главных рядов, то он содержит и всякую структуру с 0 и 1, главные ряды которой имеют длину $\geqslant n_0$ (n_0 зависит от Y). 2) Понятие структуры с 0 и 1, не имеющей главных рядов, не является конечно формализуемым.

Теорема. 1) Если некоторый арифметический класс Y содержит всякую группу без кручения, то он содержит и всякую группу, в которой все элементы имеют либо бесконечный порядок, либо порядок, делящийся только на простые числа $\geqslant P_{n_0}$ (n_0 зависит от Y). 2) Понятие группы без кручения не является конечно аксиоматизируемым.

Лит.: 1. Robinson A., On the metamathematics of algebra, Amsterdam, 1951.

С. В. Яблонский (*Москва*). **Об одном семействе классов функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию.** Пусть класс Q является классом функций алгебры логики ($Q \subset P_2$), обладающим следующими свойствами:

1. 0, $1 \in Q$.

2. Класс Q инвариантен относительно операции подстановок констант.

3. Класс Q инвариантен относительно операции переименования переменных.

Примеры: 1) Q — класс симметричных функций; 2) Q — класс монотонных функций и др.

Обозначим через $P_Q(n)$ число функций класса Q, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $L_Q(n)$, $L(n)$ суть наименьшие целые числа, такие, что каждая функция, зависящая от n переменных и принадлежащая классу Q, соответственно P_2, может быть реализована контактной схемой с числом контактов, не превосходящим $L_Q(n)$, соответственно $L(n)$.

Теорема 1. $\left\{\sqrt[2^n]{P_Q(n)}\right\}$ стремится, не возрастая, к пределу и

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{P_Q(n)} \leqslant 2.$$

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{P_Q(n)} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L_Q(n)}{L(n)} = 0$.

Следовательно, функции класса Q, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{P_Q(n)} = 1$, допускают существенно более простую, чем это имеет место в общем случае, схемную реализацию.

СЕКЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

М. А. Гаврилов (*Москва*), **Г. Н. Поваров** (*Москва*), **В. Н. Рогинский** (*Москва*), **В. И. Шестаков** (*Москва*), **А. Д. Харкевич** (*Москва*). **Математическая проблематика структурной теории релейных схем.** Развитие дискретной автоматики и телемеханики, в том числе вычислительной техники, делает задачи структурного анализа и синтеза автоматических и телемеханических устройств дискретного действия весьма сложными и трудоемкими, и это вызывает потребность в специальном математическом исследовании таких задач и разработке специального математического аппарата. Доклад имеет целью познакомить широкие круги математиков с математической проблематикой, возникающей в теории структурного анализа и синтеза релейных схем—одного из наиболее важных видов дискретных автоматических и телемеханических устройств,— и способствовать тем самым скорейшему решению этих вопросов.

Основным математическим аппаратом теории релейных схем являются булева алгебра (в четырех интерпретациях), алгебра Галуа и их арифметические эквиваленты. Облегчая решение схемных задач, эти математические дисциплины в свою очередь воспринимают от теории релейных схем ряд проблем. Встает проблема исследования систематики этих алгебр с точки зрения теории релейных схем (симметрия функций в этих алгебрах, суперпонируемость функций, сложность и т. д.). Проведенные за рубежом и у нас исследования такого рода выявили, например, много новых алгебраических и геометрических свойств булевых функций (работы К. Э. Шеннона, Э. Н. Гилберта, Г. Н. Поварова и др.).

Далее возникает проблема разыскания в этих алгебрах операций, наиболее подходящих для осуществления анализа, синтеза и преобразования релейных схем (операции ⋕ и $\vdots|\vdots$ учет неиспользуемых комбинаций состояний, мостиковые функции, квазиминоры и т. д.). Эти задачи рассматривались в работах М. А. Гаврилова, В. Н. Рогинского, В. И. Шестакова, Г. Н. Поварова и др. Учет конечных значений сопротивлений требует при этом расширения и переработки булевой алгебры (работы В. Н. Рогинского, Я. Шекела и др.).

Кроме алгебры, теория релейных схем использует комбинаторику, теорию графов и геометрию, в том числе многомерную. Это ставит ряд геометрических задач (работы Р. Греа, Р. Игонне, В. М. Остиану, М. Карно и др.). Теория графов только начинает применяться.

Проблема количественной оценки структурных элементов в релейных схемах требует сложных комбинаторных расчетов, для которых весьма важна методика решения некоторых целочисленных уравнений. Требуется разработка теории таких уравнений. С другой стороны, проблема количественной оценки требует исследований по изоморфизму графов.

Другого рода количественные задачи встают при исследовании релейных коммутационных систем (работы Л. Е. Садовского, А. Д. Харкевича, К. Э. Шеннона и др.). Здесь возникают проблемы для теории подстановок и теории чисел.

Теория многотактных схем требует разработки теории рекурсивных процессов, определимых системами булевых уравнений (работы М. А. Гаврилова, В. И. Шестакова, Гр. К. Моисила, Д. Хайфмена и др.).

В настоящее время теория релейных схем перерастает в общую теорию дискретных процессов связи и управления, и это обобщение выдвигает новые, весьма сложные математические задачи.

Л. В. Канторович (*Ленинград*), **Л. Т. Петрова** (*Ленинград*). **О математической символике, удобной при вычислениях на машинах.** 1. Применение машин в математических вычислениях, естественно, оказывает влияние на применяемую математическую символику. Вопрос об используемой символике является существенным при передаче машине математического задания. Естественными требованиями к применяемой символике являются ее универсальность, простота, четкость.

2. Представляется удобным использовать вместо аналитических и логических формул со скобками запись связей и зависимостей математических объектов в виде расчлененной схемы типа

$$K = F(K_1, K_2, K_3),$$
$$K_1 = F_1(K_4, K_5, K_6),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где F_i и K_i—номера, обозначающие те или иные объекты из данного поля объектов.

Каждую строку $K=F(K_1, K_2, K_3)$ можно прочитать так: объект K получается с помощью оператора F из объектов K_1, K_2, K_3. Такая запись дает возможность графически изобразить схему в виде частично упорядоченного дерева логической подчиненности результатов.

Схемная запись может применяться для логических и аналитических формул, для вычислительных планов по той или иной задаче и пр.

3. Схемная символика обладает многими полезными свойствами:

а) устанавливает подчиненность результатов;

б) кроме полной формулы, она включает различные частичные схемы, определяющие одни промежуточные результаты через другие;

в) позволяет просто проводить некоторые аналитические преобразования схем например, дифференцирование функции) заданной схемой;

г) ряд упрощений и преобразований плана и формулы можно делать при оперировании с абстрактными схемами, не вникая в содержательное значение элементов, т. е. в весьма общем и простом виде: например, объединение схем, сокращение схемы за счет вычеркивания излишних номеров и т. д.;

д) схемная символика проста и удобна при записи математических формул и вычислительных планов;

е) в виде схемы может быть записан сложный вычислительный план, элементами ее могут быть различные математические величины, операторы, программы, схемы и т. д. Осуществляться этот план может с помощью универсальной программы, анализирующей схему и выполняющей отдельные операции, входящие в ее состав.

4. Интересной оказывается возможность анализа абстрактных схем, без учета содержательного значения элементов.

Схема рассматривается как ряд строк, составленных из номеров (n-местные схемы). Вводятся понятия вычислимой схемы, неприводимой схемы, понятие объединения двух схем, «приведения подобных» в схемах, преобразования схем.

Ш. Е. Микеладзе (*Тбилиси*). **Формулы численного дифференцирования и интегрирования для регулярной функции.** Рассматривается вопрос конструирования квадратурных формул и формул численного дифференцирования для функции $f(z)$, регулярной в области G плоскости комплексного переменного z.

Доказываются следующие теоремы:

1. Разделенную разность n-го порядка от $f(z)$ для собрания различных между собой значений аргумента $a_\nu \in G$ можно представить в виде

$$f(z, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{\nu=0}^{s} (Ht)^\nu f(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{\nu+1}, a_1, \ldots, a_m) + (1+s) H^{s+1} R(t),$$

где

$$R(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^s f(\underbrace{a+\tau H, \ldots, a+\tau H}_{s+2}, a_1, \ldots, a_m)\,d\tau$$

$(z=a+Ht, \quad a_\nu=a+t_\nu H\,(H\neq 0),$ где H и $t_\nu \quad (\nu=1, 2, \ldots, m)$ — вообще комплексные числа).

Это разложение и интерполяционная формула Лагранжа (Ньютона) позволяют сконструировать квадратурные формулы и формулы численного дифференцирования, имеющие, по возможности, высшую степень точности.

2. Для того чтобы существовала квадратурная формула (t_α и t_β — вещественные числа, t — вещественная переменная)

$$\int\limits_A^{a+Ht_\beta}\int\limits_A^{z}\ldots\int\limits_A^{z} f(z)\,dz^n=\frac{H^n}{(n-1)!}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-1}f(a+Ht)\,dt=H^n\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu f(a_\nu)+R_{m+n+s+1},$$

$$A_\nu=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta}\frac{(t_\beta-t)^{n-1}P(t)}{(t-a_\nu)P'(a_\nu)}\,dt, \qquad P(t)=\prod_{k=1}^{m}(t-t_k)$$

для n-кратного интеграла, взятого по прямолинейному отрезку, ограниченному точками $A=a+Ht_\alpha$ и $a+Ht_\beta$ и расположенному целиком в G, с остаточным членом

$$R_{m+n+s+1}=\frac{s+1}{(n-1)!}H^{m+n+s+1}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-1}P(t)\,R(t)\,dt,$$

имеющим порядок малости $m+n+s+1$ относительно H, необходимо и достаточно, чтобы числа t_k удовлетворяли системе уравнений

$$\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-1}t^\nu P(t)\,dt=0 \qquad (\nu=0, 1, \ldots, s<m).$$

При $n=1$, вещественных a, a_ν и H полученная квадратурная формула приводит к квадратурным формулам типа Гаусса—Маркова для простых определенных интегралов.

3. Если в качестве чисел t_k взять корни двучленного уравнения $t^m-1=0$, то будет иметь место формула

$$\frac{H^n f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m}t_\nu^{m-n}f(a+t_\nu H)-H^{m+n}f(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n+1}, a_1, \ldots, a_m),$$

выражающая значение $f^{(n)}(z)\,(0<n<m)$ в точке $z=a$ через значения $f(z)$ в вершинах правильного m-угольника, вписанного в единичный круг с центром в a.

Отбросив член, имеющий порядок малости $m+n$ относительно H, мы получим формулу для вычисления приближенного значения $f^{(n)}(a)$.

Г. А. Николаева (*Ленинград*). **О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов.** 1. Видоизменение метода Л. В. Канторовича для нахождения функции, отображающей круг на область, заданную уравнением $F(x, y, \lambda)=0$, на случай любых немалых значений параметра λ.

2. Численная реализация этого метода: построение конформного преобразования, круга на области, определяемые промежуточными параметрами; построение матриц для вычисления значений производных и сопряженных функций.

3. Применение метода для кривых, заданных в параметрической форме.

4. Рассмотрение вопроса о сходимости метода, основанное на сведении задачи к решению некоторого нелинейного функционального уравнения и на применении к нему метода Ньютона.

5. Оценка погрешности в отображающей функции на основании тех же соображений.

Л. Т. Петрова (*Ленинград*), **М. А. Яковлева** (*Ленинград*). **О крупноблочном программировании.** 1. Реализация огромных возможностей, которые несет за собой использование быстродействующих машин для решения математических задач, в известной степени затруднена при применении обычной системы программирования, так как процесс подготовки программы и отладки ее для реальной задачи оказывается довольно сложным и длительным.

2. В Ленинградском отделении Математического института АН СССР в настоящее время группой научных сотрудников разрабатывается другая система программирования, целью которой является упрощение работы по программированию и максимальное приближение программы к обычному вычислительному плану.

Основная идея этой системы заключается в том, что программа работы фактически не составляется, а в машину вводится лишь соответствующим образом закодированный вычислительный план (блок-схема), которой читается и осуществляется с помощью специальной, раз навсегда составленной программы «прораба».

3. Одной из особенностей данной системы является то, что в качестве основных элементарных объектов, с которыми оперирует блок-схема, выступают, как правило, не отдельные числа, а «величины»—некоторые совокупности чисел или формул; это могут быть векторы, матрицы, трехмерные матрицы, поле величин и т. д. Для таких величин, наряду с их числовым содержанием, вводится справка, представляющая описание этого материала и его расположение (число компонент, начальный элемент, шаг).

4. Вместо операций обычной программы вводятся укрупненные операции, рассчитанные на действия с «величинами».

5. Схема состоит из блоков, каждый из которых записан в одной ячейке.

Блок имеет вид: $K=F\ (K_1,\ K_2,\ K_3)$ и может быть прочитан так: величина K получается в результате выполнения операции F над величинами K_1, K_2, K_3.

6. В Ленинградском отделении Математического института созданы две универсальные программы: «прораб I» и «прораб II». «Прораб» первого типа сам определяет порядок выполнения работы. Он разбирает блок-схему, спускаясь от главной искомой по дереву, подчиненности до строчки, где все аргументы известны. В «прорабе» второго типа схема записывается в порядке ее выполнения.

Помимо выполнения операции, стоящей в данной строчке, «прорабом» вырабатывается справка результата, если она не предусмотрена заранее. «Прорабом» же производятся переадресация и размещение результатов.

7. Преимуществом данной системы программирования является то, что она позволяет в более наглядной и краткой форме, близкой к обыкновенному математическому плану вычислений, вводить работу в машину.

Недостатком системы является увеличение машинного времени за счет операции «прораба». Второй недостаток: «прораб» занимает значительное место в оперативной памяти. Эти недостатки в значительной степени могут быть устранены за счет целесообразного составления блок-схемы и размещения материала.

Б. П. Пугачев (*Воронеж*). **Об одном методе приближенного отыскания собственных значений.** Пусть A—положительно определенная матрица. Изучаются два метода приближенного отыскания наименьшего собственного числа m и соответствующего ему собственного вектора e_m, предложенные М. А. Красносельским.

Пусть

$$\Delta_k = Ax_k - \mu_k x_k, \qquad \mu_k = \frac{(Ax_k,\ x_k)}{(x_k,\ x_k)}, \qquad \gamma_k = \frac{(\Delta_k,\ \Delta_k)}{(A\Delta_k,\ \Delta_k)}.$$

Рассматриваются методы, описываемые равенствами

$$x_{k+1}=x_k-\gamma_k\Delta_k, \tag{1}$$

$$x_{k+1}=x_k-2\gamma_k\Delta_k. \tag{2}$$

Оба метода, имеющие простой геометрический смысл, дают последовательности x_{k+1}, сходящиеся к ce_m, при этом $\mu_k \to m$.

Найдены оценки, характеризующие быстроту сходимости. Для случая, когда нулевые приближения x_0 равномерно распределены в некотором шаре, при некоторых предположениях о собственных значениях матрицы A доказывается, что числа $\frac{1}{\gamma_k}$ с положительной вероятностью сходятся к наибольшему собственному числу M матрицы A. Векторы $\frac{\Delta_k}{\|\Delta_k\|}$ при этом сходятся к собственному вектору e_M, соответствующему собственному числу M. Таким образом, метод (2) может применяться в случае, когда нужно одновременно найти m и M.

Методы (1) и (2) применены и в случае, когда A — положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

Проводится сравнение методов (1) и (2) с методом наискорейшего спуска Л. В. Канторовича.

И. А. Яковлев (*Харьков*). **О приложении алгорифма Шварца к приближенному решению некоторых краевых задач.** В работах С. Л. Соболева и С. Г. Михлина доказана сходимость алгорифма Шварца для краевых задач теории упругости Однако до сих пор имеются лишь единичные примеры применения этого метода для приближенного решения задач; это, повидимому, объясняется тем, что метод построения последовательности приближений требует индивидуального подхода для каждого шага.

Этот недостаток можно устранить некоторым видоизменением алгорифма и получить таким образом практически пригодный метод для приближенного решения ряда задач.

Пусть ищется решение 1-й краевой задачи для уравнения эллиптического типа $Lu=f$ в области $Д_1+Д_2$ с границей s_1+s_2. Общую часть областей $Д_1$ и $Д_2$ обозначим через $Д_{12}$ и ее границу $\sigma_1+\sigma_2$ ($s_1+\sigma_1$ — граница $Д_1$, $s_2+\sigma_2$ — граница $Д_2$). Пусть решение в областях $Д_1$ и $Д_2$ находится в виде рядов:

$$\begin{aligned} u_1(M)&=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k(M) \quad \text{в} \quad Д_1, \\ u_2(M)&=\sum_{l=1}^{\infty} B_l\psi_l(M) \quad \text{в} \quad Д_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Очевидно, в $Д_{12}$

$$u_1(M)=u_2(M). \tag{2}$$

Пусть функции $\varphi_k(M)$ образуют полную нормальную ортогональную систему на границе $s_1+\sigma_1$ (или ее части $\supset\sigma_1$), а функции $\psi_l(M)$ — на $s_2+\sigma_2$. Обозначим

$$\alpha_{kl}=\int_{\sigma_1}\varphi_k\psi_l\,dM, \qquad \beta_{kl}=\int_{\sigma_2}\varphi_k\psi_l\,dM.$$

Тогда, используя равенства (1) и (2) получим бесконечную систему

$$A_k=\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_{kl}B_l+\gamma_k,$$

$$B_l=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{kl}A_k+\delta_l.$$

В ряде случаев (области, составленные из конечного числа прямоугольников, например кручение и изгиб уголка или полого прямоугольника с прямоугольным отверстием) удается после несложных преобразований свести систему к вполне регулярной или такой, что оператор преобразования оказывается ограниченным в l_2. В этих случаях строится двустороннее приближение к решению задачи и удается оценить погрешность, пользуясь методом лимитант.

И. М. Ярышева (*Ленинград*). **Решение задачи Гурса методом конечных разностей.** Рассматривается задача интегрирования гиперболического уравнения, когда граничные значения неизвестной функции заданы вдоль характеристик

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial t} = f(x,\ t,\ U,\ U_x,\ U_t)$$

(где f линейна относительно U_x и U_t).

Одним из приближенных методов решения поставленной задачи является разностный метод. В составлении разностных схем можно идти двумя путями: во-первых, заменять непосредственно производные в уравнении конечными разностями по интерполяционным формулам, во-вторых, идти путем, аналогичным методу Адамса и Коуэла решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первый путь хорошо разработан и часто применяется в практике, но получаемые при этом разностные схемы часто неустойчивы. Нами рассматривались разностные схемы, получаемые вторым путем.

Пусть на плоскости построена сетка с прямыми, параллельными осям и с шагом h по x и k по t. Считая, что до некоторого места вычисления проведены, проинтегрируем исходное уравнение в прямоугольнике $[x_i,\ x_{i+1};\ t_j,\ t_{j+1}]$ сетки:

$$U_{i+1,\, j+1} = U_{i+1,\, j} + U_{i,\, j+1} - U_{i,\, j} + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(\xi,\ \eta,\ U,\ U_\xi,\ U_\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Определение решения в точке $(x_{i+1},\ t_{j+1})$ свелось к вычислению выписанного интеграла. Вычислим этот интеграл приближенно, представляя f отрезками интерполяционных формул функций двух переменных. Тогда получим разностные схемы следующего типа:

$$U_{i+1,\, j+1} = U_{i+1,\, j} + U_{i,\, j+1} - U_{i,\, j} + hk \sum_{\nu,\, \mu=0,\, 0}^{u,\, v} a'_{\nu,\, \mu} f_{i+1-\nu,\, j+1-\mu}.$$

Точность этих вычислительных схем можно повышать, привлекая к вычислению большее число точек. Разностные схемы, получаемые указанным путем, устойчивы. Относительно этих схем могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть

1) $\sum\limits_{\nu,\, \mu} |a'_{\nu,\, \mu}| \leqslant L$;

2) f как функция U удовлетворяет условию Липшица с постоянной M;

3) шаги сетки h и k таковы, что $hk < \frac{1}{LM}$ в случае, если $f = f(x,\ t,\ U)$, и $hk + h + k < \frac{1}{LM}$ в случае, если $f = f(x,\ t,\ U,\ U_x,\ U_t)$. Тогда схема (3) устойчива.

Теорема 2. Если имеет место устойчивость, то имеет место и сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи при условии, что остаточный член интерполяционной формулы, применяемой для получения данной разностной схемы, стремится к нулю при $h,\ k \to 0$.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

М. А. Айзерман (*Москва*), Ф. Р. Гантмахер (*Москва*). **Определение периодических режимов в динамических системах с кусочно-линейными характеристиками.** Определяются периодические режимы в динамических системах, которые описываются уравнениями

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \rho_i f(x_1) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где все a_{ij} и ρ_i — заданные числа, а $f(x_1)$ — непрерывная либо разрывная кусочно-линейная характеристика, составленная из любого числа звеньев, параллельных двум заданным прямым.

Решения ищутся в форме рядов Фурье. Показывается, что бесконечное множество коэффициентов этих рядов линейно выражается через конечное число параметров — времен прохождения отдельных звеньев характеристики во время периодического режима (в пределах одного периода). В итоге составляются уравнения для определения этих времен (уравнения периодов) и строится соответствующее периодическое решение.

А. Г. Бабуков (*Грозный*). **Об одной новой граничной задаче для телеграфного уравнения.** Хорошо известно решение телеграфного уравнения

$$u''_{tt} + \eta u'_t = a^2 u''_{xx} \qquad (\eta > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l) \tag{1}$$

при граничных условиях типа

$$u'_x + hu = \theta(t)$$

в том случае, когда $h = \text{const}$.

В рассматриваемом случае строится при помощи известных, вообще говоря, приемов периодическое решение телеграфного уравнения (1) при граничных условиях

$$u(0,\ t) = 0, \tag{2}$$

$$u'_x(l,\ t) + h(t)\,u(l,\ t) = h(t)\,\theta(t), \tag{3}$$

где переменный коэффициент $h(t)$ и функция

$$\theta(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

суть заданные периодические функции времени одного и того же периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

В предыдущей работе автора [1] получено интегральное представление граничных (при $x = l$) значений $u(\psi)$ искомой функции $u(x,\ t)$, удовлетворяющей уравнению (1) и условию (2) через граничные значения ее производной $u'_x(\psi)$ в виде

$$u(\psi)=C+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_1(\psi,\ \varphi)\,u'_x(\varphi)\,d\varphi, \tag{4}$$

где C — произвольная константа,

$$K_1(\psi,\ \varphi)=\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\operatorname{tg}\delta_n\,l e^{-in(\psi-\varphi)},$$

$$a^2\delta_n^2=n^2\omega^2-in\omega\eta \qquad \left(i=\sqrt{-1}\right).$$

При помощи (4) из условия (3) получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода для функции $u(\psi)$, имеющее вид

$$u(\psi)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(\psi,\ \varphi)\ u\ (\varphi)\,d\varphi=F(\psi), \tag{5}$$

где ядро и правая часть, вычисляемые по известным данным задачи, суть

$$K(\psi,\ \varphi)=h(\varphi)\,K_1(\psi,\ \varphi)-\frac{1}{2},$$

$$F(\psi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\varphi)\,K_1(\psi,\ \varphi)\,\theta(\varphi)\,d\varphi.$$

Уравнение (5) решается приближенными методами. Аналогичное уравнение можно получить и для функции $u'_x(\psi)$. Численная проверка показывает, что изложенный метод дает фомальный прием решения поставленной задачи. К ней сводится изучение, линейных продольных колебаний упругого стержня, имеющего переменную во времени жесткость $h(t)$ упругой связи на конце $x=l$ и, повидимому, к ней же сведется и ряд других аналогичных физических задач.

Лит.: 1. Бабуков А. Г., ДАН СССР, 88, № 4, (1953).

В. З. Власов (*Москва*). **Бимоментная теория пространственных колебаний и аэродинамической устойчивости тонкостенных стержней-оболочек.** Предложенная. автором общая бимоментная теория стержней-оболочек, учитывающая при изгибном кручении депланацию поперечных сечений и основанная, по существу, на отказе от гипотезы плоских сечений и принципа Сан-Венана, имеет полную математическую аналогию с элементарной теорией изгиба балок.

Эта теория обобщается на задачи статической и динамической устойчивости предварительно напряженных конструкций типа тонкостенных стержней открытого и закрытого профилей.

Пространственные изгибно-крутильные колебания конструкции, испытывающей начальное напряжение от заданной нагрузки или температуры и находящейся в потоке воздуха, описываются системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от обобщенных упругих характеристик конструкции, от величин, относящихся к начальному напряженному состоянию, и от аэродинамических нагрузок, пропорциональных квадрату скорости ветра.

Известные задачи Эйлера, Прандтля, Тимошенко, Динника и Вагнера по теории устойчивости упругих систем из теории автора получаются как частные случаи.

В работе приводятся результаты расчета аэродинамической устойчивости американского висячего Такомского моста. Критическая скорость ветра $v=16{,}9$ м/сек, полученная по теории автора, практически совпадает со скоростью $v=18{,}6$ м/сек, при которой произошло крушение моста.

И. И. Гольденблат (*Москва*). **Вариационные методы и канонические уравнения в механике деформируемых сред.** 1. Вариационные методы, в частности метод, основанный на принципе Гамильтона—Остроградского, неоднократно применялись для вывода уравнений движения идеальной жидкости. Вместе с тем эти методы оказываются наиболее эффективными для получения уравнений движения деформируемых сред, обладающих весьма общими свойствами.

2. Применение принципа Гамильтона—Остроградского для получения уравнений движения различных анизотропных сред требует знания полной системы совместных инвариантов тензора конечных деформаций и тензоров, характеризующих анизотропные свойства этих сред. Во многих случаях эти инварианты могут быть найдены методами тензорной алгебры.

3. Вариационные принципы приводят к наиболее эффективным приемам установления связей между полем напряжений и полем плотности энергии деформации для различных сред. В частности, таким путем наиболее просто может быть выведена известная формула Мурнагана.

4. Метод, основанный на принципе Гамильтона—Остроградского, дает возможность придать классическим уравнениям движения деформируемых сред форму, не зависящую от выбора пространственно-временных координат, в качестве которых могут быть взяты произвольные, в достаточно широком смысле этого слова, функции пространственных координат и времени.

5. Вариационные методы особенно эффективны в релятивистской механике деформируемых сред. В частности, эти методы дают возможность получения не только точных, но и различных приближенных уравнений движения газа в магнитных и сильных переменных гравитационных полях. Полученные таким образом уравнения важны для решения различных астрофизических проблем.

6. Исходя из лагранжиана деформируемой среды, можно обычным путем построить гамильтониан и вывести канонические уравнения движения этой среды. Введение канонических переменных и гамильтониана позволяет наиболее простым путем перейти к квантовой теории деформируемых сред. В частности, таким образом легко выводятся перестановочные соотношения и уравнения Шредингера для квантовой идеальной жидкости, полученные ранее другими методами.

А. А. Никольский (*Москва*). **Методы решения нелинейных вихревых задач аэродинамики отрывных течений.** В докладе дается математическая постановка нелинейных задач аэрогидродинамики к которым приводит теоретическое исследование проблемы обтекания крыла малого удлинения при больших углах атаки со срывом потока с передней и боковой кромок, проблема обтекания плохообтекаемых тел с наличием отрывов потока и вихреобразований; приводятся приближенные решения ряда простейших задач.

П. Ф. Фильчаков (*Киев*). **Метод последовательных конформных отображений и некоторые его приложения к задачам механики.** Отображение сложных односвязных областей при помощи последовательности элементарных отображений приводилось в разных формах рядом авторов (М. А. Лаврентьев, Н. Роззбах, Н. Т. Мелещенко, В. С. Козлов и др.). В настоящее время метод последовательных конформных отображений находит все большее распространение.

Будем рассматривать в качестве элементарных отображения

$$E_n = E(m_n, a_n, b_n); \quad T_n = T(m_n, a_n, h_n) \text{ и } N_n = N(m_n, a_n, s_n),$$

которые соответственно отображают нижнюю полуплоскость с вырезанным поллуэллипсом или треугольником или с наклонным прямолинейным разрезом z на нижнюю полуплоскость ζ при нормировке $\zeta|_{z=\infty} = z$.

Пользуясь последовательностью отображений E_n, T_n, N_n (в частных случаях может отсутствовать одно или два из этих элементарных отображений), можно с любой степенью точности отобразить полуплоскость с произвольным (но ограниченным) количеством луночек произвольной формы на полуплоскость, а также криволинейную полосу на полосу, образованную двумя параллельными линиями.

Замкнутые односвязные области необходимо соответствующей элементарной функцией предварительно преобразовать в область рассматриваемого вида.

Выводятся эффективные расчетные формулы для осуществления отображений E_n, T_n, N_n, которые позволяют производить вычисления как на малых счетных машинах (включая и арифмометр), так и на быстродействующих.

В каждом из данных шагов можно две или три точки границы области $z \equiv z_n$ одним из отображений E_n, T_n, N_n перевести в три точки действительной оси области $\zeta \equiv z_{n+1}$. Выбранные три (или две) точки границы z_n и определяют параметры отображающей функции в n-м шаге.

Точки, расположенные на действительной оси, в процессе дальнейшего решения так и остаются на действительной оси, претерпевая только сдвиг.

Рассматривается применение метода последовательных конформных отображений к некоторым задачам механики и, в частности, к задачам стационарной фильтрации и к задачам обтекания решеток профилей.

Дается графический прием решения задач фильтрации при помощи циркуля и угольника, свободно скользящего по направляющей.

Полученные результаты сопоставляются с точными аналитическими решениями, с результатами электромоделирования и с натурными наблюдениями.

В качестве иллюстрации будет продемонстрировано моделирование на электропроводной бумаге одной из рассматриваемых задач на портативном интеграторе ЭГДА-7.

М. Д. Хаскинд (*Одесса*). **Теория сопротивления судов при ходе на волнении.** 1. В работе автора [1] установлена общая формула для среднего сопротивления судов при ходе на волнении

$$\overline{R}^* = \rho \left\{ \iint_{\Sigma_0} \left[\left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \overline{n} - \overline{V} V_n + u\overline{V} \cos(n, x) \right] dS - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{g} \oint_L \left[u\overline{V} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \overline{n} \right]_{z=0} dl \right\}^*, \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости, $\Phi(x, y, z, t)$ — потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, $\overline{V} = \operatorname{grad} \Phi$, u — скорость хода судна, g — ускорение силы тяжести, Σ_0 — поверхность простирающаяся от невозмущенного уровня жидкости и охватывающая поверхность судна, L — контур поверхности Σ_0 при $z=0$ и $\overline{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Σ_0 и L.

Из формулы (1) как частный случай вытекают соответствующие формулы для плоских и пространственных задач при установившемся движении, а также для случая дифракции регулярных волн вокруг вертикальных цилиндров. Указанная формула может быть применена для вычисления сопротивления судов при ходе на нерегулярном волнении и при движении в ограниченных водных бассейнах (мелководье и каналы).

2. Рассматривая регулярное волнение и основываясь на асимптотике для функции Φ, полученной в цитированной работе, выражение (1) представляем в удобном для вычисления виде. В дальнейшем анализируется в отдельности дифракция, чисто вынужденная качка судна на спокойной воде в общем случае, и выделяется слагаемое, соответствующее вычислению $\overline{R}^*$ при допущениях А. Н. Крылова.

3. Использование физических предпосылок и полученных автором [2] в 1954 г. результатов для удлиненных судов приводит к значительному упрощению вычислений $\overline{R}^*$, в особенности для ее боковой составляющей. Приводятся точные формулы для этой составляющей.

Лит.: 1. Хаскинд М. Д., Труды ЦАГИ, № 603, (1947). 2. Хаскинд М. Д., Изв. АН СССР, ОТН, № 11, (1954).

Д. И. Шерман (*Москва*). **Об изгибе круглых пластинок со смешанными краевыми условиями.** Рассматриваются два случая:

а) контур пластинки частично защемлен и частично оперт;

б) контур пластинки частично оперт и частично свободен.

В обоих случаях задача сводится к сингулярному интегральному уравнению и затем к вполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

Н. Н. Яненко (*Москва*). **Решения уравнений газовой динамики с вырожденным годографом (бегущие волны).** Рассмотрим уравнение газовой динамики из энтропического неустановившегося движения политропного газа:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\qquad (i=1,\ldots,m), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}=0, \tag{2}$$

$$p=a^2\rho^{\gamma},\qquad \gamma>1. \tag{3}$$

Вырожденным решением (бегущая волна) системы (1), (2), (3) будем называть решение, для которого матрица

$$\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial\rho}{\partial x_m}\,\dfrac{\partial\rho}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial u_1}{\partial x_m}\,\dfrac{\partial u_1}{\partial t}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial u_m}{\partial x_m}\,\dfrac{\partial u_m}{\partial t}\end{matrix}\right\|$$

имеет ранг $r<m$.

В случае $r=1$ решение называется простой волной. Для простой волны получен в явном виде общий интеграл, зависящий от m произвольных функций одного аргумента.

В случае $r=2$, $m=2$ удалось доказать, что единственными движениями, имеющими общую систему линий уровня, которые являются прямыми, будут конические течения.

Обозначая

$$\alpha_i=\frac{x_i-x_{i_0}}{t-t_0},\qquad i=1,\ 2,$$

уравнения конического течения можно привести к виду

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}+(u_1-\alpha_1)\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+(u_2-\alpha_2)\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}=0,$$
$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}+(u_1-\alpha_1)\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}+(u_2-\alpha_2)\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}=0,$$
$$\theta\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\left[(u_1-\alpha_1)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}+(u_2-\alpha_2)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}\right]=0,$$

где $\theta=c^2$ (квадрат скорости звука).

В случае $m=2$ удалось доказать, что течения, граничащие с областью покоя, имеют граничными поверхностями поверхности $t=\varphi(x_1, x_2)$, удовлетворяющие уравнению

$$(u_1p_1+u_2p_2-1)\left[(u_1p_1+u_2p_2-1)^2-(p_1^2+p_2^2)\,\theta\right]=0,$$

где $p_i=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ФИЗИКИ

Н. В. Зволинский (*Москва*). **Исследование осесимметричной волны в слоистой упругой среде методом функционально-инвариантных решений.** Граничные задачи распространения колебаний в упругой среде в большей части случаев представляют значительные трудности для исследования. Хотя в настоящее время известны достаточно общие методы построения решений указанных задач (метод разделения переменных, метод функционально-инвариантных решений), однако изучение каждой конкретной задачи требует большого труда. В связи с этим большое значение приобретают приближенные способы исследования.

В настоящей работе показывается, что метод функционально-инвариантных решений в применении к задаче с осевой симметрией позволяет развить некоторый приближенный прием, при помощи которого волновое поле может быть изучено в окрестности фронтов различных волн, наблюдаемых в этом поле. Приближенный прием демонстрирует на примере задачи отражения и преломления волн на границе двух различных упругих полупространств, граничащих вдоль плоскости. Падающая волна вызвана точечным источником, действующим непродолжительное время (источник типа взрыва).

Показано, как получаются аналитические представления для интенсивности различных отраженных, преломленных и головных волн; обсуждаются физические свойства этих волн. Показано также, что приближенный прием, развитый в настоящей работе, позволяет изучить задачу об экранировании сейсмических волн при отражении и преломлении на границах тонкого упругого слоя, включенного в упругую среду другими свойствами.

А. С. Компанеец (*Москва*) и **Ю. С. Саясов** (*Москва*). **О влиянии малых возмущений формы области на собственные электромагнитные колебания в замкнутых областях.** Ряд задач в теории электромагнитных резонаторов, представляющих практический интерес, естественным образом приводит к постановке вопроса о влиянии малых возмущений формы области на собственные электромагнитные колебания в полостях различного вида. (Здесь под малыми возмущениями подразумеваются возмущения, приводящие к незначительному изменению объема и формы полости.) В докладе излагается ряд работ, посвященных в основном этой теме.

1. Слабое нарушение цилиндричности сильно вытянутых областей. Исследование ряда случаев, когда решения уравнений Максвелла как для невозмущенной цилиндрической области, так и для слабо возмущенной, но утратившей цилиндричность области выражаются в известных функциях, приводит к следующему интересному выводу [1]: если длина цилиндра L много больше его радиуса R, то возмущение основного колебания типа TM_{000} имеет порядок $\left(\frac{L}{R}\right)^2 \varepsilon$, где $\varepsilon=\frac{\delta R}{R}$ (δR—максимальное изменение радиуса по сравнению с невозмущенным), т. е. значительно больше, чем геометрическое возмущение ε. Аналогичный результат имеет место при переходе от идеального цилиндра к слегка «бочкообразной» области [2], а также в других случаях слабого возмущения сильно вытянутой области.

2. Пример возмущения области, приводящего к изменению ее связности. Пример такого рода, рассмотренный в работе [3], отвечает переходу от (имеющей связность тора) области, образованной биконусом и сферой с центром в вершине биконуса, к (имеющей связность сферы) области, образованной сфероидом малого эксцентриситета и софокусным с ним двуполостным гиперболоидом. Развитый в [3] метод аналитического сопряжения решения, определенного вблизи вершин гиперболоидов, с решением, определенным в основной части полости (т. е. на расстояниях от вершин гиперболоидов, много больших расстояния между вершинами гиперболоидов), приводит к выводу, что возмущение электромагнитных колебаний в основной части полости имеет порядок $\varepsilon \ln \varepsilon$ (ε—относительное возмущение объема).

3. Периодические неровности на стенках резонатора. В работе [4] рассматривались возмущения, имеющие характер параллельных бороздок с глубиной, много меньшей размеров области, направленных вдоль образующей цилиндрического резонатора или параллельно ей. Исследование этого случая, проводившееся в [4] двумя различными методами, привело к следующему выводу: магнитное поле вблизи поверхности цилиндра претерпевает сильное локальное возмущение и концентрируется преимущественно на выпуклостях неровностей. Это приводит к заметному увеличению поверхностного сопротивления.

Лит.: Саясов Ю. С., ДАН СССР, **40**, (1953), 163. 2. Саясов Ю. С., Диссертация, ИХФ, 1955. 3. Компанеец А. С. и Саясов Ю. С., ЖТФ, **25**, (1955), 1124. 4. Компанеец А. С. и Саясов Ю. С., ЖТФ, 23, (1953), 2185.

В. О. Кононенко (*Москва*). **О колебаниях в нелинейных системах с изменяющимися параметрами.** Некоторые задачи механики и физики, связанные с колебательными процессами, приводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами, а также к нелинейным уравнениям с коэффициентами, «медленно уклоняющимися от периодических».

Рассматриваются нелинейные уравнения, содержащие малые параметры в такой форме, что при нулевом значении последних уравнения вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами.

Предлагается способ построения приближенных решений таких уравнений, основанный на применении асимптотических методов интегрирования.

Искомые решения представляются в виде разложений по степеням малого параметра. Функции, входящие в разложения, определяются из вспомогательных дифференциальных уравнений, описывающих медленные процессы, например, изменение амплитуды колебания и др.

Приводятся примеры применения метода для решения задач о колебаниях в системах с одной и с несколькими степенями свободы.

И. М. Лифшиц (*Харьков*) **и Г. И. Степанова** (*Харьков*). **О спектре колебаний неупорядоченных кристаллов.** Определение спектра колебаний неупорядоченных кристаллических решеток приводится (в простейшем случае раствора изотопов) к следующей математической задаче.

Дана разностная эрмитовская матрица $\hat{L}\,(L_{\vec{r}\,\vec{r}'} \equiv L_{\vec{r}-\vec{r}'};\ \Sigma\,|L_{\vec{r}}| < \infty;\ \vec{r}$—целочисленные векторы) ранга N. При $N \to \infty$ ее спектральная плотность $N\nu_0(z)$ (т. е. число собственных значений на интервал dz) будет равна

$$\nu_0(z) = \int\limits_{\mu(\vec{k})=z} d\Omega / |\nabla \mu(\vec{k})|, \qquad \mu(\vec{k}) = \sum L_{\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

(интегрирование ведется по поверхности $\mu(\vec{k}) = z$).

Требуется определить математическое ожидание спектральной плоскости $\nu(z)$ (при $N \to \infty$) для матрицы $\hat{L} = \hat{L}_0 + \hat{\varepsilon}\,\hat{L}_0$, где $\hat{\varepsilon}$—случайная диагональная матрица

$\varepsilon_{\vec{r}\vec{r}'} = \varepsilon_{\vec{r}}\,\delta_{\vec{r}\vec{r}'}$), элементы которой $\varepsilon_{\vec{r}}$ принимают значения 1 и 0 с вероятностями, соответственно, p и $(1-p)$; t — вещественный параметр.

В работе разработан конструктивный метод решения поставленной задачи, основанной на определении величины следа $F = \lim\limits_{N\to\infty} Sp\{\varphi(\hat{L}) - \varphi(\hat{L}^0)\}/N$, где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция, удовлетворяющая некоторым условиям общего характера.

Получены формулы для спектральной плотности $\nu(z)$. Исследован спектр при наличии корреляции между случайными величинами $\varepsilon_{\vec{r}}$.

Г. Я. Любарский (*Харьков*) **и А. Я. Повзнер** (*Харьков*). **О распространении волн в волноводах переменного сечения.** Основным результатом работы является использование идеи получения новой точной системы дифференциальных уравнений для задачи распространения, позволяющей применить метод возмущений.

Эта система получается путем разбиения волновода на бесконечно малые волноводы и точного сопряжения решений в соседних участках.

Указанный метод применяется к волноводу, являющемуся телом вращения некоторой кривой $l(z)$ вокруг оси z. Снизу $l(z)$ переходит в прямую (цилиндрический волновод). Изучается распространение волны в таком волноводе с точностью до величин второго порядка малости (первое и второе приближения). При этом малыми параметрами считаются $\frac{l'}{l}\ \frac{\omega}{c}$ и $\frac{l''\omega}{c}$, где ω — частота возбуждаемой волны.

Первое приближение для проходящей волны следует рассматривать как обобщение известного метода WKB на пространственный случай.

Ниже приводится вид этих формул (аналог WKB) для скалярного случая с граничными условиями: I — $u=0$, II — $\frac{du}{dn}=0$ (распространение звука).

Случай I. Обозначим через $\varphi_k(x, y; z)$ нормированную собственную функцию уравнения $u_{xx}+u_{yy}+\lambda_k^2(z)\,u=0$, обращающуюся в нуль на окружности $x^2+y^2=l^2(z)$. Собственные числа нумеруются в порядке возрастания. Тогда если вдоль цилиндрической части волновода бежит волна с номером k, то в первом приближении амплитуда этой волны множится на

$$\frac{\exp\left(i\int\limits_a^z \gamma_k(s)\,ds\right)}{\sqrt{\gamma_k(z)}},$$

где $\gamma_k(z) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_k^2(z)}$.

Случай II. Обозначим через $Z_0(z)$ точку на оси, в которой находится вершина конуса, касающегося волновода вдоль окружности на высоте z. Обозначим через θ и φ сферические координаты с началом в вершине конуса. Введем функции $u_k(\theta; z)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\lambda_k^2(z) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)u = 0$$

и граничному условию $\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$ при $\theta=\theta_0$, где θ_0 — угол раствора конуса. Функции u_k нормированы условием $u_k(0)=1$.

Если вдоль цилиндрической части волновода бежит волна с номером k и индексом m (т. е. пропорциональная $e^{im\varphi}$), то в первом приближении амплитуда этой волны множится на

$$\frac{\exp\left(i\int\limits_a^z \gamma_k(s)\,ds+\frac{\theta^2}{2}\mu\right)}{l(z)\sqrt{|\gamma_k(z)|}},$$

где $\gamma_k(z)=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{a_k^2}{l^2(z)}}$, a_k — k-й корень уравнения $j'_m(a)=0$, μ — некоторая вычисленная константа.

Отметим, что второе приближение дает возможность вычислить амплитуды отраженных волн и уменьшение амплитуды проходящей волны в результате передачи части энергии отраженным волнам.

Указанные результаты, естественно, обобщаются на случай распространения электромагнитных волн.

В. П. Маслов (*Москва*). **Поправки к квазиклассическому приближению энергии.**

В уравнении Шредингера будем полагать $\frac{h^2}{2\mu}$ малым параметром. Квазиклассическое приближение энергии находится из формулы Бора с точностью до $\frac{h^2}{2\mu}$. Выведена рекуррентная формула, позволяющая подсчитать энергию с точностью до любой степени $\frac{h^2}{2\mu}$.

А. Н. Матвеев (*Москва*). **Стохастическая теория индуцированных излучением колебаний электронов в синхротронах.**

1. Введение. Общие сведения о синхротронах, излучении в них и характере колебаний электронов.
2. Постановка задачи. Квантовый характер излучения как причина стохастического процесса. Механизм возбуждения колебаний излучением, характер затухания колебаний. Стохастические уравнения колебаний и математическая формулировка задачи.
3. Решение задачи и анализ.
4. Важность рассмотренного явления для практики.

Е. М. Фейгельсон (*Москва*), **М. С. Малкевич** (*Москва*), **С. Я. Коган** (*Москва*). **Некоторые приближенные методы решения уравнений переноса излучения в атмосферу.** Задачи атмосферной оптики (определение дальности видимости, аэрофотосъемка, светомаскировка и пр.) требуют решения уравнения переноса коротковолновой радиации ($0{,}3\mu<\lambda<0{,}7\mu$, λ — длина волны) в атмосфере. Математическая теория рассеяния света в атмосфере была развита Е. С. Кузнецовым. Методом последовательных приближений было решено уравнение переноса радиации при изотропном рассеянии. В настоящем сообщении предлагаются некоторые приближенные методы решения уравнения переноса в анизотропно рассеивающей атмосфере:

а) метод аппроксимации ядер интегральных уравнений, эквивалентных уравнению переноса, невырожденными ядрами, допускающими точные решения;

б) метод сферических функций. Устранение неопределенности в граничных условиях, возникающей при применении этого метода к уравнению переноса;

в) метод решения уравнения переноса в случае вытянутых индикатрис рассеяния. Приближенное представление плотности рассеяния с учетом δ-образного характера индикатрисы;

г) метод итерации со специально подобранным первым приближением, обеспечивающим быструю сходимость.

По последнему методу проведено решение уравнения рассеяния света в двуслойной атмосфере при большом наборе экспериментальных индикатрис рассеяния и других физических параметров.

Полученное решение позволяет установить закономерности рассеяния света в атмосфере и негоризонтальной дальности видимости.

СЕКЦИЯ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Г. П. Боев (*Саратов*). **К вопросу о происхождении наших цифр.** Автор имеет в виду высказать некоторые соображения, касающиеся запутанной истории наших цифр. Древнегреческий абак непосредственно перешел в средневековый абак европейцев. Апекс-цифры возникли в Европе в тот период, когда возникла потребность в счете, но была утрачена культура счета, т. е. в VI—VIII вв. Существование неродственных форм цифр у абакистов X—XI вв. показывает, что наряду с заимствованием в Европе имело место и самостоятельное формирование знаков в предшествующую эпоху. Индийские цифры I в. до н. э. имели сложное происхождение: для 1, 2, 3 и 4—«естественное», для 4 (другой формы), 5 и 6—буквенное, для 7, 8, 9—близкое к египетским цифрам. Индийские цифры стали известны арабам в IXв. (через ал-Хорезми); между тем арабские цифры в VIII в. встречаются у Бэда. Что касается Боэция, то он, повидимому, тоже был знаком с употреблением абака и апексов. Однако глава о системе счета и апексах, помещенная в конце 1-й книги его «Геометрии», написана не ранее X в. Об этом свидетельствует лингвистический анализ наименований апексов.

В течение X—XIII вв. развивалось параллельно несколько систем цифр: апексы нескольких видов, «губар», близкий к апексам, и восточноарабская система, перешедшая в цифры М. Плануда. Развитие системы цифр в этот период шло конвергентно: различные формы одного и того же числа либо сливались, либо вытеснялись одним знаком.

Ю. М. Гайдук (*Харьков*). **Связи Якоби с русскими математиками.** Между К. Г. Якоби (1804—1851) и русскими математиками в период 1830—1840 гг. установились интересные и еще недостаточно отраженные в нашей литературе связи.

Русские современники К. Г. Якоби одними из первых оценили его заслуги. Внешним выражением этого признания явилось избрание К. Г. Якоби в 1830 г. членом-корреспондентом, а в 1833 г.—почетным членом Петербургской академии наук.

Со своей стороны К. Г. Якоби высоко ставил научный авторитет ряда русских математиков, особенно М. В. Остроградского (исследования Н. И. Лобачевского, к сожалению, не обратили на себя внимания немецкого ученого), и предсказывал развитию русской математической культуры большую будущность. Он живо интересовался деятельностью Петербургской академии наук, поместил в ее изданиях две свои работы. В физико-математическом семинаре К. Г. Якоби—Ф. Неймана в 1836—1938 гг. занимались и молодые русские ученые—И. Д. Соколов, М. Ф. Спасский, А. Н. Тихомандрицкий.

Тесный научный контакт существовал между К. Г. Якоби и русскими астрономами В. Я. Струве и Т. Клаузеном. Много откликов вызвала представленная К. Г. Якоби в Петербургскую академию наук критика предложенной дерптским астрономом И. Мэдлером теории «центрального солнца».

Связи К. Г. Якоби с петербургскими научными кругами особенно упрочились со второй половины 30-х гг. 19 в.: в 1837 г. был избран русским академиком его брат—физик Б. С. Якоби, взявший на себя посредничество в его сношениях с этими кругами.

(Переписка между братьями Якоби, пестрящая ссылками на Остроградского, издана отдельной книгой В. Аренсом в 1907 г.). Плодотворное для науки творческое соревнование К. Г. Якоби и его учеников с русскими математиками в вопросах аналитической механики и интегрального исчисления охарактеризовано в известных работах А. М. Ляпунова, Б. В. Гнеденко, Г. М. Фихтенгольца и др. Личное знакомство и переписка связывали К. Г. Якоби с академиком П. Н. Фусом. Энергичные настояния немецкого ученого способствовали тому, что Петербургская академия наук, получив отказ от царского министра в просьбе субсидировать задуманное ею издание полного собрания сочинений Эйлера, решила продолжать публикацию эйлеровских трудов на собственные средства. Опубликование в 1908 г. П. Штекелем и В. Аренсом материалов переписки между К. Г. Якоби и П. Н. Фусом по этому предмету послужило одним из стимулов к началу осуществления Швейцарским обществом натуралистов при международной поддержке полного издания сочинений Эйлера.

К. Г. Якоби был лично знаком и с Н. Д. Брашманом, большую научную эрудицию которого он сумел оценить.

Заслуживает быть отмеченным содействие К. Г. Якоби молодому белостокскому математику З. Слонимскому, изобретателю оригинальной математической машины. Якоби дал этому изобретению высокую оценку и просил петербургских академиков принять участие в судьбе ее конструктора. По отзыву К. Г. Якоби и других экспертов Слонимскому была присуждена Петербургской академией наук демидовская премия.

Смерть К. Г. Якоби была воспринята русскими учеными как большая утрата для науки.

Популяризация в русской литературе открытий К. Г. Якоби (и Абеля) в теории эллиптических функций началась, по инициативе М. В. Остроградского и Н. Д. Брашмана, еще в 30-х гг. прошлого века. Крупнейшая заслуга в пропаганде в России этой теории и в ее дальнейшей разработке принадлежала в 40—50-х гг. И. И. Сомову. Оригинальные исследования по теории абелевых функций, предварившие публикацию фундаментального мемуара Абеля и вызвавшие весьма одобрительный отзыв со стороны К. Г. Якоби, были выполнены в 1843 г. Ф. Г. Миндингом.

Во второй половине XIX в. теория эллиптических функций и ее приложения заняли видное место в творчестве русских математиков.

И. М. Рабинович (*Рига*). **П. Г. Боль.** Математическая наука обязана рижанину П. Г. Болю (1865—1921) тремя открытиями: 1) понятием квази-периодических функций, 2) методом неподвижной точки в анализе, 3) понятием устойчивости движения «в смысле Боля». Первое из этих открытий освещено в монографии Б. М. Левитана «Почти периодические функции» (стр. 11), второму был посвящен доклад А. Мышкиса в Московском математическом обществе. Здесь мы сосредоточимся на третьем открытии Боля, до сих пор еще не получившем должного отражения в нашей литературе.

Пусть t — независимая переменная, $x_{10}, x_{12}, \ldots, x_{12\mu_n}$ — функции этой переменной, $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i\mu_n+1}$ — ее производные соответствующих порядков (по μ_n+1), причем $i=1, 2, \ldots, n$, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — функции переменных t, x_{10}, x_{11}, $x_{n\mu_n}$.

Пусть $\overline{\overline{x}}_{10}, \overline{\overline{x}}_{20}, \ldots, \overline{\overline{x}}_{n0}$ — решение системы

$$|x_{i,\ \mu_{i+1}} - F_i| \leqslant \varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{I}$$

распространяющееся на промежуток T с начальной точкой. Пусть, наконец, $\overline{x}_{10}, \overline{x}_{20}, \ldots, \overline{x}_{n0}$ — решение системы

$$x_{i\mu_i+1} - F_i = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{II}$$

распространяющееся на T и обусловленное равенствами

$$\overline{x}_{10}(0) = \overline{\overline{x}}_{10}(0), \quad \overline{x}_{11}(0) = \overline{\overline{x}}_{11}(0), \ldots, \overline{x}_{n\mu_n}(0) = \overline{\overline{x}}_{n\mu_n}(0).$$

Система (1) называется устойчивой в смысле Боля, если существуют такие числа $a>0$ и k, что для $0<\varepsilon\leqslant a$ на всем промежутке T, независимо от выбора решения x и T, будет иметь место условие

$$|\overline{x}_{i0}-\overline{\overline{x}}_{i0}|\leqslant k\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Наложив на F определенные, достаточно общие условия, Боль вывел критерий устойчивости системы (II) в указанном смысле.

В целях лучшего применения введенного им понятия Боль особо исследовал случай, когда F_i представляют собой суммы двух слагаемых. Если дифференциальные уравнения, полученные в результате отбрасывания вторых слагаемых этих сумм, оказываются устойчивыми в указанном смысле, то при их решении становится возможным воспользоваться методом последовательных приближений при весьма общих предположениях.

П. Боль пришел к понятию устойчивости рассмотренного вида следующим путем.

В 1909 г. в журнале Крелля им был опубликован мемуар «Об одной проблеме, встречающейся в теории вековых возмущений». Речь в нем идет о проблеме движения планетных узлов, сводящейся к следующему вопросу.

Если в выражении

$$ke^{i\varphi}=\sum_{\nu=1}^{u} N_\nu e^{i(g_\nu t+h_\nu)},$$

где N_ν, g_ν, h_ν — постоянные, которые определяются из наблюдений, взять $\nu=3$, то существует ли такое число c, что разность $\varphi - ct$ остается между определенными границами даже при неограниченном возрастании t?

Доказав теорему, позднее получившую название «теоремы Вейля о равнораспределенности иррациональных чисел в смысле единичного модуля», Боль пришел к выводу, что принятым методом принципиально невозможно установить наличие или отсутствие отмеченного числа c. С космологическими выводами Боля, вытекающими из этого результата, не согласился Ф. Бернштейн, и в 1911 г. между ними возникла полемика, в которой Боль занимал материалистические позиции. Развивая свою мысль, он пришел к проблеме доверительности дифференциальных уравнений, заменяющих собою при исследовании законов природы дифференциальные неравенства. Эта проблема и привела его к понятию устойчивости в указанном выше смысле.

Принципиальная важность поднятых Болем вопросов, а также значимость его открытий вызывает необходимость более детального знакомства с его жизнью и творчеством.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕЗЮМЕ ОБЗОРНЫХ ДОКЛАДОВ

РЕЗЮМЕ СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

Труды третьего всесоюзного Математического съезда, т. II

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета Академии наук СССР

* * *

Технический редактор *Е. Н. Симкина.*

* * *

Сдано в набор 3/VI 1956 г. Подп. в печать 20/VI 1956 г. Формат бум. 70×108 1/16.
Печ. л. 10 1/2 (14,38). Уч.-изд. лист. 14,2. Тираж 3000. Изд. № 1875.
Зак. № 373. Т-05100
Цена 10 р.
Издательство Академии наук СССР. Москва, Подсосенский пер., д. 21.

16-я типография Главполиграфпрома Министерства культуры СССР.
Москва, Трехпрудный пер., д. 9.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТРУДЫ
ТРЕТЬЕГО ВСЕСОЮЗНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЪЕЗДА

Москва, июнь—июль 1956

Том II

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ОБЗОРНЫХ И СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва . 1956